ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

А. Г. Багдасарян

# Об одной теореме вложения разных измерений

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 3/VI 1992)

Первые результаты по проблеме вложений разных измерений для пространств С. Л. Соболева были получены С. Л. Соболевым [1] и дополнены затем В. И. Кондрашевым и В. П. Ильиным. Эти результаты формулировались в терминах $W$-пространств и, как выяснилось, не могли иметь замкнутой формы в терминах этих пространств ($p\neq 2$).

Первые окончательные результаты были получены Аронштайном, Слободецким, Гальярдо. Для пространств Никольского—Бесова прямые и обратные теоремы вложения разных измерений были доказаны С. М. Никольским [2,3] и О. В. Бесовым [4,5]. Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [6] описаны следы функций из достаточно общих гильбертовых пространств. Следующим шагом в этом направлении является введение и изучение (в частности доказательство теорем о следах) пространств типа $H$ Соболева—Лиувилля и $B$ Никольского—Бесова, порожденных вполне правильным многогранником $\mathbf{N}$ (см. [7]). В [8] при доказательстве теоремы о следах рассматривались вполне правильные многогранники с единственной вершиной вне $R_{n-1}$, лежащей на $n$-той координатной оси, и полные многогранники, полученные его срезом плоскостью, параллельной $R_{n-1}$. Было установлено, что пространства $H_p$, порожденные этими многогранниками, имеют одни и те же пространства следов, если срез отстоит от $R_{n-1}$ на расстоянии большем, чем $1/p$. Следовательно, все остальные пространства между ними имеют то же пространство следов. Тот же факт обнаруживается в настоящей статье и в случае произвольного выпуклого, вполне правильного многогранника.

В статье приводится теорема вложения разных измерений (прямая и обратная) для пространств $H$ и $B$, порожденных произвольным выпуклым, вполне правильным многогранником, у которого $n$-ые координаты всех вершин вне $R_{n-1}$ больше, чем $1/p$.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$R_n$ — $n$-мерное евклидово пространство,

$$\overset{+}{R}_n=\{x;\ x=(x_1, x_2, \dots, x_n)\in R_n,\quad x_i\geq 0,\quad i=1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 1. Непустой многогранник N, с вершинами из $\overset{+}{R}_n$ назовем полным, если начало координат $R_n$ является вершиной N и N имеет вершины на каждой оси координат $R_n$, отличные от начала координат.

Полный многогранник N назовем вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней N имеют только положительные координаты.

Рассмотрим выпуклый, вполне правильный многогранник N. Пусть вершины многогранника N имеют следующие $n$-тые координаты: $0, m_1, \ldots, m_N$, причем $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_N$.

Пусть далее $N_0$ — проекция многогранника N на $\overset{+}{R}_{n-1}$, а $N_1$ — проекция на $\overset{+}{R}_{n-1}$ сечения многогранника N плоскостью $x_n = m_1$.

Сопоставим многограннику N функции

$$\nu(\xi) = \left(\sum_a (1+\xi_j^2)^{a_j}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mu(\xi) = (\nu^2(\xi) - A)^{\frac{1}{2}},$$

где сумма берется по всем вершинам многогранника N (количество которых обозначим через $A$), кроме начала координат и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \overset{+}{R}_n$.

Определение 2. Пусть $\sigma(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция в $R_n$, имеющая полиномиальный рост, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$.

Положим

$$H_p^s(\sigma;\ R_n) = \{ f \in S';\ \|f\|_H = \|F^{-1}\sigma^s F f\|_{L_p(R_n)} < \infty \}.$$

Определение 3. Пусть $\lambda(\xi)$ — непрерывная в $R_n$ и бесконечно дифференцируемая в $R_n \setminus \{0\}$ функция полиномиального роста такая, что $\lambda(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, $\lambda(0) = 0$, $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \lambda(\xi) = \infty$.

Через $\Phi(\lambda;\ R_n)$ обозначим множество систем функций, обладающих следующими свойствами:

а) $\varphi_k \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geqslant 0$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots;$

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi \in R_n;\ 2^{k-1} \leqslant \lambda(\xi) \leqslant 2^{k+1}\}$, $\quad k = 1, 2, \ldots;$

$\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \{\xi \in R_n;\ \lambda(\xi) \leqslant 2\};$

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) = 1$, $\quad \xi \in R_n;$

г) $\|F\varphi_k\|_{M_p} \leqslant c$, $\quad k = 1, 2, \ldots;\ c > 0,\ 1 < p < \infty$.

Здесь $M_p$ — множество мультипликаторов Фурье типа $(p, p)$.

Пример системы из $\Phi(\lambda;\ R_n)$ приведен в ([8]).

**Определение 4.** Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\lambda;\ R_n)$. Положим

$$B^s_{p,q}(\lambda;\ R_n) = \{ f \in S' :\ \|f\|_B = \| f * \varphi_k \|_{l_q(L_p(R_n))} < \infty \}.$$

Определение пространств $l_q(L_p)$ можно найти, например, в [9].

Пусть функции $\nu_0(\xi')$ и $\nu_1(\xi')$ отвечают многогранникам $N_0$ и $N_1$ подобно тому, как функция $\nu(\xi)$ отвечает многограннику $N$. Положим далее

$$\lambda(\xi') = \left( [A_0^{-1} \nu_0^2(\xi')]^{s - \frac{1}{pm_1}} \cdot [A_1^{-1} \nu_1^2(\xi')]^{\frac{1}{pm_1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $A_0$, $A_1$ — количество вершин многогранников $N_0$, $N_1$, отличных от начала координат.

Определим оператор следа соотношением

$$T_r f = f(x', 0), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad f \in S.$$

Наша цель — описание следов функций из $H^s_p(\nu;\ R_n)$ и $B^s_{p,q}(\mu;\ R_n)$ при этом на функциях из этих пространств оператор $T_r$ понимается как расширение по непрерывности определенного выше оператора следа.

**Теорема.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $s \cdot m_1 > \frac{1}{p}$. *Тогда оператор следа есть ретракция*

а) $H^s_p(\nu;\ R_n)$ *на* $B^1_{p,p}(\lambda;\ R_{n-1})$,

б) $B^s_{p,q}(\mu;\ R_n)$ *на* $B^1_{p,q}(\lambda;\ R_{n-1})$.

Это означает (см. [9]), что оператор следа — линейный ограниченный оператор, для которого существует линейный ограниченный оператор продолжения $\sigma$ такой, что $T_r \sigma = E$.

Частный случай этой теоремы был установлен в [8], где рассматривался многогранник с единственной вершиной вне $R_{n-1}$, лежащей на $n$-той координатной оси. Такие многогранники обладают тем свойством, что их проекции на $R_{n-1}$ подобны всем многогранникам, полученным срезом плоскостью, параллельной $R_{n-1}$. Соответствующие пространства в $R_{n-1}$ типа $H$ (или $B$) отличаются друг от друга только верхним индексом, что существенно облегчает доказательство теоремы о следах.

В нашем случае приходится иметь дело с пространствами разной анизотропии. Доказательство приведенной теоремы основано на интерполяции пространств типа $H$ (или $B$) разной анизотропии (срезы не подобны).

Рассмотрим ту часть многогранника $N$, которая заключена между ее проекцией на $R_{n-1}$ и первым срезом (срезом, проходящим через вершину вне $R_{n-1}$ с наименьшей $n$-той координатой). Обозначим соответствующее пространство типа $H$ через $H^s_\bullet$. Ясно, что $H^s_p(\nu; R_n) \subset H^s_\bullet$.

Наряду с этим пространством находится пространство $H^s_{\bullet\bullet}$, которое вложено в $H^s_p(\nu; R_n)$ и такое, что $TrH^s_{\bullet\bullet} = TrH^s_\bullet$. Ясно, что тогда $TrH^s_\bullet$ является одновременно и пространством следов пространства $H^s_p(\nu; R_n)$.

Пространство $TrH^s_\bullet$ описывается с помощью интерполяции пространств, соответствующих проекции и первому срезу многогранника N.

Аналогичные рассуждения проводятся и для $B$-пространств.

Ереванский государственный
университет

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

## Տարբեր չափողականությունների ներդրման մի թեորեմի մասին

*Հոդվածում բերվում է թեորեմ, որի օգնությամբ որոշվում են ուռուցիկ, լիովին կանոնավոր բազմանիստով ծնված Սոբոլև-Լիուվիլի և Նիկոլսկի-Բեսովի տիպի տարածությունների հետքերի տարածությունները: Պարզվում է, որ այդ տարածությունները կախված են միայն բազմանիստի սկզբնական մասից (մինչև $R_{n-1}$-ից դուրս առաջին գագաթին հանդիպելը)։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Соболев*. Мат. сб., т. 4, № 46, с. 471—497 (1938). [2] *С. М. Никольский*. Тр. МИАН СССР, т. 38, с. 244—278 (1951). [3] *С. М. Никольский*. Мат. сб., т. 33, № 75, с. 261—326 (1953). [4] *О. В. Бесов*. Тр. МИАН СССР, т. 60, с. 42—81 (1961). [5] *О. В. Бесов*, ДАН СССР, т. 126, № 6, с. 1163—1165 (1959). [6] *Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях*, УМН, т. 20, № 1, с. 3—74 (1965). [7] *В. П. Михайлов*, Тр. МИАН СССР, т. 91 с. 59—81 (1967). [8] *А. Г. Багдасарян*. Изв. АН АрмССР Математика, т. 23, № 4, с. 353—365 (1988). [9] *И. Берг, И. Лёфстрём*. Интерполяционные пространства. Введение, Мир, М., 1980.