

МАТЕМАТИКА

УДК 519.682.1

С. А. Нигяян

Функциональная концепция языков программирования

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсисяном 4/XI 1991)

Обсуждается функциональный взгляд на языки программирования, при котором программы языка рассматриваются как системы уравнений, построенные с использованием монотонных типов высших порядков над частично упорядоченным множеством M , содержащим неопределенный элемент $\perp$, который является наименьшим элементом множества M , и каждый элемент из M сравним только с $\perp$ и с самим собой. Так мы приходим к определению функционального языка программирования, множество программ которого определяется заданием множеств M , C , X , T , где C — множество констант монотонных типов, X — множество переменных монотонных типов, T — некоторое подмножество множества λ -термов, построенных из элементов множеств C и X . Каждое уравнение программы имеет вид $F = t$, где $F \in X$, $t \in T$, и тип терма t согласован с типом переменной F . В этих условиях каждая программа имеет наименьшее решение (теорема 1), главную функцию которого (функцию, соответствующую первому уравнению программы и принадлежащую типу порядка 1) будем считать семантикой программы. Естественно, должен существовать алгоритм (интерпретатор), который бы для каждой программы языка вычислял значения ее главной функции. В работе рассматривается класс функциональных языков L , использующих переменные и эффективно представимые константы любых порядков; описан универсальный интерпретатор для класса языков L (теорема 2). К классу L принадлежат все широко распространенные алгоритмические языки, такие, как: язык рекурсивных функций Гёделя-Эрбрана ⁽¹⁾, функциональный язык Бэкуса ⁽²⁾, Лисп ⁽³⁾, язык нормальных алгоритмов Маркова ⁽¹⁾, язык машин Тьюринга ⁽¹⁾, Рефал ⁽⁴⁾, процедурные языки: Фортран, Алгол, Паскаль и т. д. В работе также приведен пример функционального языка программирования $L_0 \in L$, так как L_0 использует монотонный, но не непрерывный функционал. Описан интерпретатор языка L_0 и тем самым проиллюстрировано то, как могут конструироваться интерпретаторы для таких языков.

1. **Формализация.** Зафиксируем непустое множество M . Введем понятие типа: 1) множество M есть тип; 2) любое непустое подмножество типа есть тип; 3) если $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — типы, то множество всех отображений из $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$ в β (обозначим $\{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$) есть тип; 4) других типов, кроме определенных согласно 1—3, нет. Каждому типу α сопоставим натуральное число $\text{ord } \alpha$, называемое его порядком. Если $a \in M$, то $\text{ord } a = 0$, если же $a \in \{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$, где $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — типы, то $\text{ord } a = \max(\text{ord } \alpha_1, \dots, \text{ord } \alpha_k, \text{ord } \beta) + 1$. Если x — переменная типа α и $c \in \alpha$, то $\text{ord } x = \text{ord } c = \text{ord } \alpha$. Если $c \in \{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$, где $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — типы, то через $\text{Arg } c$ обозначим $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$.

Пусть C — множество констант некоторых типов, X — множество переменных некоторых типов. Определим множество термов $T(C, X)$. Каждому терму t сопоставим: а) множество переменных, от которых t зависит — $\text{var } t$; б) тип терма t — $\text{type } t$; в) если $\text{var } t \subset \{y_1, \dots, y_n\}$, $y_0 = \langle y_1^0, \dots, y_n^0 \rangle$, где $y_i^0 \in \alpha_i$, α_i — тип переменной y_i , то терму t сопоставим константу $\text{val}_{y_0}^-(t)$, $i = 1, \dots, n$, $n > 0$.

Определение терма:

1) если $c \in C$, то $c \in T(C, X)$, $\text{var } c = \emptyset$, $\text{val}_{y_0}^-(c) = c$, $\text{type } c = \{c\}$;
2) если $x \in X$, то $x \in T(C, X)$, $\text{var } x = \{x\}$, $\text{val}_{y_0}^-(x) = y_i^0$, если $x = y_i$ ($1 \leq i \leq n$), $\text{type } x = \alpha$, где α — тип переменной x ;

3) пусть $\tau, t_1, \dots, t_k \in T(C, X)$, $k > 0$, $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — типы такие, что $\text{type } \tau \subset \{\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta\}$, $\text{type } t_i \subset \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$, тогда $\tau(t_1, \dots, t_k) \in T(C, X)$ и, если $t = \tau(t_1, \dots, t_k)$, то $\text{var } t = \text{var } \tau \cup \text{var } t_1 \cup \dots \cup \text{var } t_k$, $\text{val}_{y_0}^-(t) = \text{val}_{y_0}^-(\tau)(\text{val}_{y_0}^-(t_1), \dots, \text{val}_{y_0}^-(t_k))$, $\text{type } t = \{\text{val}_{y_0^0, \dots, y_n^0}^-(t) \mid y_i^0 \in \text{type } y_i, i = 1, \dots, n\}$;

4) пусть $\tau \in T(C, X)$, $x_1, \dots, x_k \in X$, $k > 0$ и, если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$ ($1 \leq i, j \leq k$), тогда $\lambda x_1 \dots x_k [\tau] \in T(C, X)$ и, если $t = \lambda x_1 \dots x_k [\tau]$, то $\text{var } t = \text{var } \tau \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, $\text{val}_{y_0}^-(t) \in \{\text{type } x_1 \times \dots \times \text{type } x_k \rightarrow \text{type } \tau\}$ и, если $\text{var } t = \{y_1, \dots, y_m\}$, $0 \leq m \leq n$, $y_0 = \langle y_1^0, \dots, y_m^0 \rangle$, то для всяких $x_j^0 \in \text{type } x_j$, $j = 1, \dots, k$, $\text{val}_{y_0}^-(t)(\bar{x}_0) = \text{val}_{y_0, x_0}^-(\tau)$, где $\bar{x}_0 = \langle x_1^0, \dots, x_k^0 \rangle$, $\text{type } t$ определяется так же, как в пункте 3;

5) других термов, кроме определенных согласно 1—4, нет.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1 = \tau_1 \\ \vdots \\ F_n = \tau_n \end{cases} \quad (1)$$

где $F_i \in X$ и, если $i \neq j$, то $F_i \neq F_j$, $\tau_i \in T(C, X)$, $\text{type } \tau_i \subset \text{type } F_i$, $\text{var } \tau_i \subset \{F_1, \dots, F_n\}$, $i, j = 1, \dots, n$, $n \geq 1$.

Условимся обозначать через F множество $\text{type } F_1 \times \dots \times \text{type } F_n$ и через φ — отображение $F \rightarrow F$, определяемое следующим образом:

$\varphi(\bar{g}) = \langle \text{val}_{\bar{g}}(\tau_1), \dots, \text{val}_{\bar{g}}(\tau_n) \rangle$ для любого $\bar{g} \in F$. Через $(\bar{g})_i$ обозначим i -ю компоненту вектора $\bar{g} \in F$, $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что $\bar{f} \in F$ есть решение системы (1), если $\varphi(\bar{f}) = \bar{f}$.

Пусть A, B — частично упорядоченные множества (ч. у. м.) и f, g — некоторые отображения из A в B , тогда $f \leq g$, если для любого $a \in A$, $f(a) \leq g(a)$ ($\leq$ — символ частичного порядка); f — монотонное отображение, если для любых $a, b \in A$ таких, что $a \leq b$, имеем $f(a) \leq f(b)$. Ч. у. м. назовем замкнутым, если всякое его линейно упорядоченное (л. у.) подмножество имеет $\sup$. Отметим, что всякое замкнутое множество имеет наименьший элемент — $\sup \emptyset$.

Пусть M — ч. у. м., содержащее наименьший элемент $\perp$ и каждый элемент из M сравним только с $\perp$ и с самим собой. Введем понятие монотонного типа: 1) множество M есть монотонный тип; 2) если $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — монотонные типы, то множество всех монотонных отображений из $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$ в β (обозначим $[\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]$) есть монотонный тип; 3) других монотонных типов, кроме определенных согласно 1—2, нет. Отметим, что всякий монотонный тип является замкнутым множеством. Константы и переменные монотонных типов условимся называть монотонными; системы уравнений (1) использующие только монотонные константы и переменные — монотонными системами уравнений.

Рассмотрим монотонную систему уравнений (1). Пусть O — множество всех ординалов, отвечающих мощностям, не превосходящим мощность множества F . Определим отображение $\gamma: O \rightarrow F$ следующим образом: $\gamma(0) = \Omega$, где Ω — наименьший элемент множества F , $\gamma(\xi) = \varphi(\xi')$, если $\xi = \xi' + 1$ для некоторого ординала ξ' , $\gamma(\xi) = \sup \{\gamma(\eta) \mid \eta < \xi\}$, если $\xi > 0$ и не существует такого ординала ξ' , что $\xi = \xi' + 1$.

Теорема 1. *Монотонная система уравнений (1) имеет наименьшее решение $\bar{f} = \sup \{\gamma(\xi) \mid \xi \in O\}$.*

Функциональный язык L определяется заданием четверки множеств M, C, X, T , где M — ч. у. м., содержащее неопределенный элемент $\perp$, который является наименьшим элементом множества M , и каждый элемент из M сравним только с $\perp$ и с самим собой; C — некоторое множество монотонных констант; X — некоторое множество монотонных переменных; $T \subset T(C, X)$. Обозначим через $P(L)$ множество систем уравнений (1) таких, что $\tau_i \in T$, $\text{type } F_i = [M^k \rightarrow M]$, $k \geq 1$, $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что функция $f \in [M^k \rightarrow M]$ ($k \geq 1$) представима в языке L , если существует такая система $P \in P(L)$, что если $\bar{f}$ — ее наименьшее решение, то $(\bar{f})_i = f$. Обозначим $(\bar{f})_i$ через f_P , а k — через γ_P . Функциональный язык L назовем функциональным языком программирования, если существует такой алгоритм U , что для любых $P \in P(L)$ и $\bar{m} \in M^{\gamma_P}$ имеем: если $f_P(\bar{m}) = m \neq \perp$, то $U(P, \bar{m}) = m$, если же $f_P(\bar{m}) = \perp$, то либо $U(P, \bar{m}) = \perp$, либо U

на P и $\bar{m}$ функционирует бесконечно. В этом случае $P(L)$ будем называть множеством программ, а U — интерпретатором языка L .

2. Интерпретация. Будем говорить, что монотонная константа ψ порядка >2 эффективно представима, если существует такая монотонная система уравнений (1), что всякая константа порядка 1, используемая системой, является вычислимой функцией, система не использует констант, порядок которых >1 и, если $\bar{f}$ — ее наименьшее решение, то $\psi = (\bar{f})_1$. Систему (1) назовем эффективным представлением ψ , а уравнение $F_1 = \tau_1$ главным уравнением данного представления.

Определим класс функциональных языков L . Класс L состоит из всех тех функциональных языков, которые используют монотонные переменные и константы любых порядков, причем константы порядка 1 являются вычислимыми функциями, а константы порядков ≥ 2 эффективно представимы.

Теорема 2. *Всякий язык $L \in L$ является функциональным языком программирования.*

Доказательство теоремы 2 основано на лемме 2. Доказательство же леммы 2 использует теорему 1 и лемму 1. Для формулировки этих двух лемм нам необходимо ввести ряд понятий.

На всяком замкнутом множестве A определим топологию следующим образом. Множество $S \subset A$ является открытым, если:

- 1) $a \in S$ и $a \leq b \Rightarrow b \in S$;
- 2) $D \neq \emptyset$, $D \subset A$, D — л. у. м. и $\sup D \in S \Rightarrow D \cap S \neq \emptyset$.

Далее будем считать, что на всяком замкнутом множестве определена такая топология. Тогда, если A, B — замкнутые множества и $f: A \rightarrow B$, то f — непрерывно $\Leftrightarrow f(\sup D) = \sup f(D)$ для любого непустого л. у. $D \subset A$. Легко показать, что всякое непрерывное отображение монотонно.

Пусть M — ч. у. м., содержащее наименьший элемент $\perp$ и каждый элемент из M сравним только с $\perp$ и с самим собой. Введем понятие непрерывного типа: 1) множество M есть непрерывный тип; 2) если $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — непрерывные типы, то множество всех непрерывных отображений из $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k$ в β (обозначим $(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta)$) есть непрерывный тип; 2) других непрерывных типов, кроме определенных согласно 1—2, нет.

Определение корректно, так как всякий непрерывный тип является замкнутым множеством. Константы и переменные непрерывных типов условимся называть непрерывными; системы уравнений (1), использующие только непрерывные константы и переменные, — непрерывными системами уравнений.

Лемма 1. *Непрерывная система уравнений (1) имеет наименьшее решение $\bar{f} = \sup \{\varphi^k(\Omega) \mid k < \omega\}$, где Ω — наименьший элемент множества F , $\varphi^0(\Omega) = \Omega$, $\varphi^{k+1}(\Omega) = \varphi(\gamma^k(\Omega))$, $k < \omega$, ω — ординал, соответствующий натуральному ряду.*

Каждому монотонному типу α сопоставим непрерывный тип $\bar{\alpha}$ следующим образом: если $\alpha = M$, то $\bar{\alpha} = M$, если же $\alpha = [\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \rightarrow \beta]$, где $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k > 0$) — монотонные типы, то $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}_1 \times \dots \times \bar{\alpha}_k \rightarrow \bar{\beta}]$. Каждой монотонной переменной x типа α сопоставим непрерывную переменную $\bar{x}$ типа $\bar{\alpha}$. Некоторые монотонные константы мы назовем проецируемыми.

Определение проецируемой константы: 1) всякая монотонная константа порядка 0 или 1 и всякая монотонная константа порядка 2, которая непрерывна, будут проецируемыми, проекциями этих констант являются они сами; 2) пусть $\delta \in \alpha$, где α — монотонный тип и $\text{ord } \alpha = n \geq 3$, тогда δ будет проецируемой константой, если существует такая непрерывная константа $\bar{\delta} \in \bar{\alpha}$, называемая ее проекцией, что для любых векторов $\bar{\sigma}_{n-1}, \dots, \bar{\sigma}_{n-k}$ ($1 \leq k \leq n-2$), состоящих из проецируемых констант, и векторов их проекций $\bar{\sigma}_{n-1}, \dots, \bar{\sigma}_{n-k}$ таких, что $\bar{\sigma}_{n-1} \in \text{Arg } \delta$, $\bar{\sigma}_{n-2} \in \text{Arg } \delta(\bar{\sigma}_{n-1})$, $\dots$, $\bar{\sigma}_{n-k} \in \text{Arg } \delta(\bar{\sigma}_{n-1}) \dots (\bar{\sigma}_{n-k+1})$, $\text{ord } \delta(\bar{\sigma}_{n-1}) \dots (\bar{\sigma}_{n-k}) \leq 2$, имеем: $\delta(\bar{\sigma}_{n-1}) \dots (\bar{\sigma}_{n-k}) = \bar{\delta}(\bar{\sigma}_{n-1}) \dots (\bar{\sigma}_{n-k})$; 3) других проецируемых констант, кроме определенных согласно 1—2, нет.

Монотонную систему уравнений, использующую только проецируемые константы, назовем проецируемой.

Непрерывную систему $\bar{P}$ назовем проекцией проецируемой системы P , если она получена из P в результате замены всех вхождений монотонных переменных соответствующими непрерывными переменными и всех вхождений проецируемых констант — их проекциями.

Лемма 2. Пусть P — проецируемая система уравнений вида (1) и $\bar{P}$ — ее проекция. Тогда, если $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ — наименьшее решение системы P , а $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle$ — наименьшее решение системы $\bar{P}$, то для каждого $i = 1, \dots, n$ f_i — проецируемая константа, $\bar{f}_i$ — проекция константы f_i и для тех $i = 1, \dots, n$, для которых $\text{ord } f_i \leq 2$, имеем: $f_i = \sup \{(\varphi^k(\Omega))_i \mid k < \omega\}$, где Ω — наименьший элемент множества F , $\varphi^0(\Omega) = \Omega$, $\varphi^{k+1}(\Omega) = \varphi(\varphi^k(\Omega))$, $k < \omega$, ω — ординал, соответствующий натуральному ряду.

Из леммы 2 следует, что всякая эффективно представимая константа проецируема и всякий эффективно представимый функционал (константа порядка 2) непрерывен.

Доказательство теоремы 2 заключается в описании интерпретатора для любого языка $L \in \mathcal{L}$. Интерпретатор языка $L \in \mathcal{L}$, получив на вход программу $P \in \mathcal{P}(L)$ и $\bar{m} \in M^{\bar{P}}$, делает следующие ша-

ги. Добавляет к P эффективные представления всех констант порядков ≥ 2 , используемых в программе P . Заменяет вхождение константы порядка ≥ 2 переменной, используемой в левой части главного уравнения ее эффективного представления. В результате выполнения этих двух шагов будет получена система уравнений $\bar{P}$, использующая только такие константы, порядки которых ≤ 1 и $f_P = f_{\bar{P}}$. Далее интерпретатор выполняет третий, заключительный шаг, который обосновывается леммой 2. Вычисляется $\sup \{(\bar{\varphi}^k(\bar{\Omega})), (\bar{m}) \mid k < \omega\} = f_{\bar{P}}(\bar{m})$, где $\bar{\varphi}$ — отображение, а $\bar{\Omega}$ — наименьший элемент, соответствующие системе $\bar{P}$.

В заключение приведем пример функционального языка программирования $L_0 \subset L$, использующего монотонный, но не непрерывный функционал θ , и опишем его интерпретатор.

Язык L_0 . Определим множества M, C, X, T .

$M = Z \cup \{\perp\}$, где Z — множество целых чисел.

$C = \{+, -, >, <, \text{if-then-else}, \delta\} \cup M$.

Определим только функционал θ , так как остальные элементы C определяются традиционным образом. Отметим, что здесь 0 и 1 будут соответствовать «истине» и «лжи» соответственно.

$\theta \in [|M \rightarrow M| \rightarrow M]$ и, если $f \in [M \rightarrow M]$, то

$$\theta(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall z \in Z, f(z) \neq \perp, \\ \perp, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$X = \{x, y\} \cup \{F_i^{(1)}, F_i^{(2)} \mid i \geq 1\},$$

где

$$\text{type } x = \text{type } y = M, \quad \text{type } F_i^{(1)} = [M \rightarrow M],$$

$$\text{type } F_i^{(2)} = [M^2 \rightarrow M], \quad i \geq 1.$$

T состоит из термов вида: $\lambda x [\text{if } e(x, c) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2]$ и $\lambda xy [\text{if } \pi \times \times \text{ then } \tau_1 \text{ else } \tau_2]$, где $e \in \{>, <\}$, $c \in Z$; t_1, t_2 имеют вид: $m, x, F_i^{(1)}(x)$, где $m \in M, i \geq 1$; π имеет вид $\theta(F_i^{(1)}), e(F_i^{(1)}(x), y), e(F_i^{(1)}(x), c), e(x, y), e(x, c), e(y, c)$, где $e \in \{>, <\}$, $c \in Z, i \geq 1$; τ_1, τ_2 имеют вид $a, F_i^{(1)}(a), F_i^{(2)}(a, b)$, где $\text{type } a \subset M, \text{type } b \subset M$, a, b используют элементы множеств $M \cup \{+, -\}, \{x, y\}$ и не используют λ .

Рассмотрим уравнение

$$F_0 = \lambda Fuv [\text{if } u = v \text{ then } f_0(F(v)) \text{ else } F_0(F, u, v - 1) + f_0(F(v))], \quad (2)$$

где

$$\text{type } u = \text{type } v = M, \quad \text{type } F_0 = [|M \rightarrow M| \times M \times M \rightarrow M],$$

$$\text{type } F = [M \rightarrow M], \quad f_0(\perp) = \perp, \quad f_0(m) = 0, \quad \text{если } m \neq \perp.$$

Интерпретатор языка L_0 , получив на вход любую программу $P \in P(L_0)$ и $\bar{m} \in M^{\gamma_P}$, добавляет к системе P уравнение (2) и все термы вида $\theta(F_l^{(1)})$, $l \geq 1$ заменяет на $F_0(F_l^{(1)}, c_{\min}^{(1)} - 1, c_{\max}^{(1)} + 1)$, где $c_{\min}^{(1)}, c_{\max}^{(1)} \in \mathbb{Z}$ и являются минимальным и максимальным из чисел, используемых в подсистеме, главным уравнением которой является уравнение с левой частью $F_0^{(1)}$. Далее интерпретатор функционирует так, как в шаге 3 доказательства теоремы 2.

Ереванский государственный университет

Ս. Ա. ՆԻՔԻՅԱՆ

Մրազրավորման լեզուների ֆունկցիոնալ կոնցեպցիա

Տրված է ծրագրավորման ֆունկցիոնալ լեզվի և նրա սեմանտիկայի սահմանումը: Մրազրավորման այն ֆունկցիոնալ լեզուների համար, որոնք օգտագործում են ցանկացած կարգի մոնոտոն տիպի փոփոխականներ և էֆեկտիվ ներկայացվող հաստատուններ, նկարագրված է ունիվերսալ ինտերպրետատոր: Բերված է ֆունկցիոնալ լեզվի ախտախտի օրինակ, որն օգտագործում է մոնոտոն, բայց ոչ անընդհատ, հեռավար ոչ էֆեկտիվ ներկայացվող ֆունկցիոնալ և նկարագրված է նրա ինտերպրետատորը: Բերված օրինակից երևում է, թե ինչպես կարելի է կառուցել ինտերպրետատորներ այդպիսի լեզուների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԿԿԱՆՈՒՄՆԵՐՆԵՐ

- ¹ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, М., 1986.
- ² J. Backus, ACM Communication, t. 21, № 8, p. 613—611 (1978).
- ³ П. Хендерсон, Функциональное программирование. Применение и реализация, Мир, М., 1983.
- ⁴ В. Ф. Турчин, Программирование на языке Рефал, ИПМ АН СССР, М., № 1; 2, (1971).