ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 529.3.01

М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян

К задаче о напряженном состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Б. Л. Абрамяном 9/X 1992)

Смешанные задачи о напряженном состоянии упругих однородных тел в виде бесконечного пространства, подверженного плоской или антиплоской деформации и ослабленного периодической системой коллинеарных прямолинейных трещин, исследовались в работах ([1–3]). Основные результаты в этом направлении подытожены в монографиях ([4–7]).

В настоящей работе методом интегральных уравнений рассматривается задача о напряженном состоянии упругого кусочно-однородного бесконечного пространства с периодической системой коллинеарных прямолинейных трещин при продольном сдвиге.

1. Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ составное упругое бесконечное пространство, состоящее из верхнего полупространства $y>0$ с модулем сдвига G_+ и нижнего полупространства $y<0$ с модулем сдвига G_-, ослаблено периодической системой сквозных трещин $\omega=\{y=0;\ -a+2nl\leqslant x\leqslant a+2nl,\ -\infty<z<\infty\}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots,\ a<l)$, расположенных в плоскости $y=0$. Пусть, далее, берега трещин нагружены направленными вдоль оси Oz силами произвольных интенсивностей

$$\tau_{yz}\big|_{y=\pm0}=-\tau_\pm(x)\qquad(x\in\omega),$$

одинаковыми для всех трещин периодической системы и вызывающими продольный сдвиг упругого пространства в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить раскрытия трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений.

Для вывода определяющих уравнений поставленной периодической задачи плоскость Oxy вдоль горизонтальной оси разрежем верхнюю и нижнюю полуплоскости $y\lessgtr0$, а затем положим

$$-\tau_{yz}\big|_{y=\pm0}=T_\pm(x)=\begin{cases}\tau_\pm(x) & (x\in\omega)\\ \tau(x) & x\in R/\omega;\end{cases}\qquad R=\{y=0;\ -\infty<x<\infty\}.$$

Тогда для смещений $u_z^{\pm}(x, 0)$ граничных точек этих полуплоскостей в направлении оси Oz по известному методу ([8]) получаем

$$u_z^{\pm}(x, 0) = \pm \frac{1}{\pi G_{\pm}} \int_{-l}^{l} \ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{\pi (x-s)}{2l}\right|} T_{\pm}(s) ds \qquad (1.1)$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

Очевидно, что функции $T_{\pm}(x)$ и $u_z^{\pm}(x, 0)$ будут периодическими функциями с периодом $2l$. Поэтому в дальнейшем их будем рассматривать только в интервале $-l \leqslant x \leqslant l$, т. е. будем ограничиваться рассмотрением полосы $\Pi = \{|x| \leqslant l, -\infty < y < \infty\}$ базовой плоскости Oxy.

Далее введем в рассмотрение функцию скачка смещений на щелях

$$\Phi(x) = u_z^{+}(x, 0) - u_z^{-}(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x) & (|x| < a), \\ 0 & (a < |x| < l), \end{cases}$$

с использованием которой при помощи (1.1) придем к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} \ln \frac{1}{2\left|\sin \frac{\pi (x-s)}{2l}\right|} \left[\frac{T_{+}(s)}{G_{+}} + \frac{T_{-}(s)}{G_{-}} \right] ds = \Phi(x) \qquad (1.2)$$

$$(|x| < l).$$

В уравнении (1.2) перейдем к новым переменным

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \qquad \eta = \frac{\pi s}{l}, \qquad \alpha = \frac{\pi a}{l} \qquad (-\alpha < \xi, \ \eta < \alpha, \ 0 < \alpha < \pi);$$

$$\frac{\pi}{l} \Phi\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \tilde{\Phi}(\xi),$$

$$\frac{1}{G_{\pm}} T_{\pm}\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \tilde{T}_{\pm}(\xi), \qquad \frac{1}{G_{\pm}} \tau_{\pm}\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \tilde{\tau}_{\pm}(\xi);$$

$$\frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \tilde{\varphi}(\xi),$$

а затем продифференцируем обе его части по ξ.

В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \left[\tilde{T}_{+}(\eta) + \tilde{T}_{-}(\eta) \right] d\eta = \tilde{\Phi}'(\xi) \qquad (|\xi| < \pi), \qquad (1.3)$$

где интеграл при $\eta = \xi$ понимается в смысле главного значения по Коши. Это уравнение будем рассматривать как сингулярное интегральное уравнение на интервале $(-\pi, \pi)$. Так как ввиду непрерывности смещений в концевых точках щелей $\varphi(\pm a)=0$, т. е. $\tilde{\varphi}(\pm a)=0$, то условие разрешимости уравнения (1.3) выполнено и по известной формуле обращения Гильберта ([9]) будем иметь:

$$\tilde{T}_{+}(\xi)+\tilde{T}_{-}(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\tilde{\varphi}'(\eta)\,d\eta+\tilde{C}, \qquad (|\xi|<\pi) \qquad (1.4)$$

где $\tilde{C}$ — неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Рассматривая ключевое уравнение (1.4) на щели $(-a, a)$, придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\tilde{\varphi}'(\eta)\,d\eta=\tilde{C}-\tilde{\tau}_{+}(\xi)-\tilde{\tau}_{-}(\xi) \qquad (|\xi|<a) \qquad (1.5)$$

при граничных условиях

$$\tilde{\varphi}(a)=0, \qquad \tilde{\tau}(-a)=0. \qquad (1.6)$$

После того, как построено решение уравнения (1.5)—(1.6), разрушающие напряжения вне щелей согласно (1.4) определятся по формуле

$$\tilde{\tau}(\xi)=-\frac{G}{2\pi}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\tilde{\varphi}'(\eta)\,d\eta+G\tilde{C} \qquad (a<|\xi|<\pi), \qquad (1.7)$$

где

$$\tilde{\tau}(\xi)=\tilde{\tau}(l\xi/\pi), \qquad G=G_{+}G_{-}/(G_{+}+G_{-}).$$

Величину G назовем приведенным модулем сдвига составного тела.

Займемся определением постоянной $\tilde{C}$. С этой целью заметим, что вследствие симметрии $u_z(\pm l, y)=0$. Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{\tau}_{yz}=(\pm l, 0)=0$ или же $\tilde{T}_{+}(\pm\pi)+\tilde{T}_{-}(\pm\pi)=0$. С учетом последнего условия из (1.4) находим

$$\tilde{C}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\tilde{\varphi}'(\xi)\,d\xi. \qquad (1.8)$$

С другой стороны в верхней полуполосе полосы П рассмотрим прямоугольник $D_{+}=\{-l\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y<d\}$, а в нижней полуполосе полосы — прямоугольник $D_{-}=\{-l\leqslant x\leqslant l,\ -d\leqslant y\leqslant 0\}$ $(d>0)$. На основании известного свойства гармонических функций

$$\int_{D_{-}}\frac{\partial u_z}{\partial n}\,ds=0, \qquad \int_{D_{-}}\frac{\partial u_z}{\partial n}\,ds=0,$$

где n — внешняя нормаль к контурам прямоугольников $D_{\pm}$. Далее, приняв во внимание, что вследствие периодичности $\left.\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|_{x=-l} = \left.\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|_{x=l}$ и напряжение в бесконечно удаленных точках полосы П отсутствует, устремим d к бесконечности и воспользуемся законом Гука. После простых преобразований придем к условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{T}_+(\xi) + \tilde{T}_-(\xi)]\, d\xi = 0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} [G_+\tilde{\tau}_+(\xi) - G_-\tilde{\tau}_-(\xi)]\, d\xi = 0; \qquad (1.9)$$

Теперь, проинтегрировав по ξ обе части уравнения (1.4) в интервале $(-\pi, \pi)$, при помощи первого условия (1.9) обнаружим, что $\tilde{C}=0$. Это условие в соответствии с (1.8) или же первое условие (1.9) совместно со вторым условием (1.9), в конечном итоге, накладывают определенные ограничения на внешние нагрузки $\tau_{\pm}(x)$ и модули сдвигов $G_{\pm}$, необходимые для осуществления антиплоской деформации в упругом составном пространстве с периодической системой трещин.

Таким образом, определяющими уравнениями обсуждаемой задачи будут уравнения (1.5)—(1.9).

2. Перейдем к решению уравнения (1.5) при условиях (1.6). Воспользовавшись формулой обращения этого уравнения в двух эквивалентных между собой формах, приведенных в ([10]), можем записать

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{(2\tilde{C} - A)\sin\frac{\xi}{2} + C\cos\frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}} + \frac{\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{2\pi\sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}} \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}}{\sin\frac{\eta-\xi}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\, d\eta \qquad (|\xi| < \alpha) \qquad (2.1)$$

или

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{2\tilde{C}\sin\frac{\xi}{2} + C_1\cos\frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}} \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}}{\sin\frac{\eta-\xi}{2}} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\, d\eta \qquad (|\xi| < \alpha); \qquad (2.2)$$

где C и C_1 — произвольные постоянные, а

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}\,\sec\frac{\eta}{2}\,[\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\, d\eta.$$

Подставляя теперь выражение $\bar{\varphi}'(\xi)$ из (2.1) или из (2.2) в условие (1.8), после элементарных преобразований находим:

$$\tilde{C} = \frac{1}{2}A = \frac{1}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}\,\sec\frac{\eta}{2}\,[\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\,d\eta = 0. \qquad (2.3)$$

Следовательно, внешние нагрузки $\tilde{\tau}_\pm(x)$ и модули сдвигов $G_\pm$ должны быть подчинены условию (2.3), а также второму условию (1.9), о необходимости которых говорилось выше.

Далее обе части (2.1) или (2.2) проинтегрируем по ξ и примем во внимание граничные условия (1.6). Исходя, например, из (2.2) и учитывая (2.3), а также выражение интеграла $I(\xi, \eta)$ из ([10]), для приведенного раскрытия трещин будем иметь:

$$\bar{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\left[\frac{D_+(\xi, \eta)}{D_-(\xi, \eta)}\right][\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\,d\eta \qquad (|\xi| \leqslant \alpha)$$

где

$$D_\pm(\xi, \eta) = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\frac{\xi}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}^2\frac{\xi}{2}\right)\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}^2\frac{\eta}{2}\right)}.$$

При этом получается $C_1 = 0$.

Теперь определим разрушающие напряжения вне трещин. С этой целью выражение $\bar{\varphi}'(\xi)$ из (2.2), в котором согласно сказанному $\tilde{C} = C_1 = 0$, подставляем в (1.7) и используем условие (1.8). Затем перейдем к ядру Коши, положив ([10]) $x = \mathrm{tg}\frac{\xi}{2}$, $t = \mathrm{tg}\frac{\eta}{2}$, $a = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

После несложных преобразований и вычисления некоторых простых сингулярных интегралов с ядром Коши вновь перейдем к прежним переменным. В результате получим:

$$\tilde{\tau}(\xi) = \frac{G\,\mathrm{sgn}\,\xi}{2\pi\sqrt{\sin\frac{\xi+\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\sin\frac{\alpha+\eta}{2}\sin\frac{\alpha-\eta}{2}}}{\sin\frac{\eta-\xi}{2}}[\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)]\,d\eta \qquad (2.4)$$

$$(\alpha < |\xi| < \pi),$$

Исходя из (2.4), вычислим коэффициенты интенсивностей:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \lim_{x \to \pm a \pm 0} \sqrt{|x \pm a|}\, \tau_{yz} = -\sqrt{2l} \lim_{\xi \to \pm \alpha \pm 0} \sqrt{|\xi \pm \alpha|}\, \tilde{\tau}(\xi) =$$

$$= \frac{G\sqrt{l}}{\pi\sqrt{\sin\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha \pm \eta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha \mp \eta}{2}\right)}} \left[\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)\right] d\eta. \qquad (2.5)$$

Приведенные в ([7]) (с. 397) выражения K_{III} для случая однородного пространства после простых преобразований совпадают с (2.5) при $G_+ = G_- = G_0$.

Отметим важное обстоятельство, что согласно (2.5) коэффициенты интенсивностей зависят от полных внешних нагрузок и модулей сдвигов, а не только от самоуравновешенной части внешних нагрузок, как это имеет место в однородном случае.

Институт механики
Национальной академии наук Армении

Մ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Երկայնական սահքի ժամանակ համուղղված ճաքերի պարբերական համակարգով բաղադրյալ առաձգական անվերջ մարմնի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջ

Դիտարկվում է միևնույն հարթության մեջ դասավորված համուղղված ճաքերի պարբերական համակարգ պարունակող բաղադրյալ առաձգական տարածության, որը գտնվում է երկայնական սահքի պայմաններում, լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրը։ Խնդրի լուծումը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում։ Այդ լուծման հիման վրա գտնված են ճաքերի բացվածքները և քայքայող լարումների ուժգնության գործակիցները։ Ընդգծված է, որ վերջինները կախված են արտաքին լրիվ բեռներից և սահքերի մոդուլներից և ոչ թե միայն արտաքին բեռների ինքնահավասարակշռող մասից, ինչպես դա տեղի ունի համասեռ տարածության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *W. T. Koiter*, Ingr. Arch., B. 28, S. 166—172 (1959). [2] *Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, с. 79—88 (1960). [3] *Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов*, ПММ, т. 25, вып. 6, с. 1110—1119 (1961). [4] *Г. П. Черепанов*, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974. [5] *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин*, Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976. [6] *П. Парис, Дж. Си*, в кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения, Мир, М., 1968. [7] *М. П. Саврук*, Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами; механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие, т. 2, Наукова думка, Киев, 1988. [8] *И. Я. Штаерман*, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1949. [9] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968. [10] *М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян*, ДАН Армении, т. 94, № 1 (1993).