ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.71

В. А. Варданян

О сложности полных проверяющих тестов для монотонных булевых функций

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. А. Шукуряном 4/VIII 1992)

Рассмотрим логические схемы с n входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и одним выходом, реализующие булевы функции $f(\tilde{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть K_n (соответственно K_1) — класс всех кратных (одиночных) константных неисправностей на n входах схемы (см. [1,2]); $P_2(n)$ — множество всех булевых функций, зависящих от n переменных; B^n — множество наборов n-мерного единичного куба.

Пусть $\Phi_n(f)$ — множество функций неисправностей (см. [1]), соответствующих всем неисправностям из K_n.

Множество наборов $T_n(f) \subseteq B^n$ называется (полным) проверяющим тестом для функции $f \in P_2(n)$ (относительно класса неисправностей K_n), если для любой функции неисправности $f' \in \Phi_n(f)$, тождественно не совпадающей с f, найдется набор $\tilde{\alpha} \in T_n(f)$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f'(\tilde{\alpha})$. Множество $T_1(f)$ называется единичным проверяющим тестом для функции $f \in P_2(n)$, обнаруживающим одиночные константные неисправности из класса K_1.

Число наборов $|T_n(f)|$ называется сложностью (длиной) теста $T_n(f)$. Тест называется минимальным для функции f, если имеет сложность, равную $t_n(f) = \min|T_n(f)|$, где минимум берется по всем проверяющим тестам $T_n(f)$ функции f. Величина $d_n(F) = \max t_n(f)$, где максимум берется по всем функциям $f \in F \subseteq P_2(n)$, называется функцией Шеннона для сложности проверяющего теста в классе функций F.

В [2] доказано, что $n/2 \lesssim t_n(f) \lesssim 2/3n$ для почти всех функций $f \in P_2(n)$, а в [2,3] установлено, что при $n \geq 1$

$$d_n(P_2(n)) = \begin{cases} 2n - 2s, & \text{если } 2^{s-1} + s < n < 2^s + s \\ 2n - 2s + 1, & \text{если } n = 2^{s-1} + s \end{cases} \tag{1}$$

В настоящей работе приводятся результаты исследования сложности полных проверяющих тестов для функций $f \in M(n)$, где $M(n)$ — множество всех монотонных булевых функций, зависящих от n переменных. Доказывается, что $t_n(f) \lesssim n/2$ для почти всех функций $f \in M(n)$, и $2n - 2\log n - O(\log\log n) < d_n(M(n)) < 2n - 2\log n + O(1)$.

Пусть $\leqslant$ — отношение предшествования в частично упорядоченном множестве B^n (см. ([1])). Набор $\tilde{\alpha} \in B^n$ называется нижней единицей (верхним нулем) для функции $f \in M(n)$, если $f(\tilde{\alpha}) = 1$ (соответственно $f(\tilde{\alpha}) = 0$) и для каждого набора $\tilde{\beta} \in B^n$ такого, что $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$ (соответственно $\tilde{\beta} \geqslant \tilde{\alpha}$), $\tilde{\beta} \neq \tilde{\alpha}$, имеет место $f(\tilde{\beta}) = 0$ (соответственно $f(\tilde{\beta}) = 1$). Через $\mathfrak{M}_1(f)$ (соответственно $\mathfrak{M}_0(f)$) обозначим множество всех нижних единиц (верхних нулей) функции $f \in M(n)$.

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$, обозначим

$$\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \qquad \tilde{\alpha}^* = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n).$$

Лемма 1. *Если $f(\tilde{\alpha}) = 0$ (соответственно $f(\tilde{\alpha}) = 1$) и $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$ (соответственно $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$), то набор $\tilde{\alpha}$ обнаруживает все неисправности из K_n для функции $f \in M(n)$, обнаруживаемые набором $\tilde{\beta}$.*

Следствие 1. Если $T_n(f)$ — некоторый проверяющий тест для функции $f \in M(n)$, то существует проверяющий тест $T_n'(f)$ для функции f такой, что

$$T_n'(f) \subseteq \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f), \qquad |T_n'(f)| \leqslant |T_n(f)|.$$

Следствие 2. Для любой функции $f \in M(n)$ множество $\mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f)$ является полным проверяющим тестом относительно K_n.

Через K_n^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим подкласс всех неисправностей из класса K_n, при которых вход x_i неисправен.

Лемма 2. *Если $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\alpha}^i) = f(\tilde{\beta})$, $\tilde{\alpha}^i \leqslant \tilde{\beta}$, или $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\alpha}^i) = f(\tilde{\beta})$, $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}^i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то наборы множества $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$ обнаруживают все неисправности из K_n^i для функции $f \in M(n)$.*

Через $B^{n,k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, обозначим k-й слой куба B^n:

$$B^{n,k} = \left\{\tilde{\alpha}:\ \tilde{\alpha} \in B^n,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\right\}.$$

Пусть $\tilde{\alpha} \in B^{n,k}$. Введем следующие обозначения:

$$Z_1(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta}:\ \tilde{\beta} \in B^{n,k+1},\ \tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}\}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1;$$

$$Z_0(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta},\ \tilde{\beta} \in B^{n,k-2},\ \tilde{\beta} \geqslant \tilde{\alpha}\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

При четных n через $M_1(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, имеющих наборы $\tilde{\alpha}$,

$$\tilde{\alpha}^* \in \mathfrak{M}_1(f) \cap B^{n,\, n/2} \quad \text{и} \quad \tilde{\beta},\ \tilde{\beta}^* \in \mathfrak{M}_0(f) \cap B^{n,\, n/2}.$$

Лемма 3. *При четных* $n \to \infty$ $|M_1(n)| \sim |M(n)|$.

При четных n через $M_2(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, имеющих наборы $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{M}_1(f) \cap B^{n,\, n/2}$ и $\tilde{\beta} \in \mathfrak{M}_0(f) \cap B^{n,\, n/2}$ такие, что $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}^*$.

Лемма 4. *При четных* $n \to \infty$ $|M_2(n)| \sim |M(n)|$.

При нечетных n через $M_3(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, обладающих следующими свойствами при любом $\sigma \in \{0, 1\}$:

1) $\mathfrak{M}_\sigma(f) \subseteq B^{n,\,(n-1)/2} \cup B^{n,\,(n+1)/2} \cup B^{n,\,(n+3)/2}$;

2) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n-1)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-1)/2} / 2^{(n+1)/2}$;

3) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n+1)/2}| \geqslant \frac{1}{2}(1 - o(1)) \binom{n}{(n-1)/2}$;

4) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n+3)/2}| \leqslant n^2 \binom{n}{(n-3)/2} / 2^{(n+3)/2}$.

При нечетных n через $M_4(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, обладающих следующими свойствами при любом $\sigma \in \{0, 1\}$:

1) $\mathfrak{M}_\sigma(f) \subseteq B^{n,\,(n-3)/2} \cup B^{n,\,(n-1)/2} \cup B^{n,\,(n+1)/2}$;

2) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n-3)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-3)/2} / 2^{(n+3)/2}$;

3) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n-1)/2}| \geqslant \frac{1}{2}(1 - o(1)) \binom{n}{(n-1)/2}$;

4) $|\mathfrak{M}_\sigma(f) \cap B^{n,\,(n+1)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-1)/2} / 2^{(n+1)/2}$.

Лемма 5. *При нечетных* $n \to \infty$

$$|M_3(n)| + |M_4(n)| \sim |M(n)|.$$

Замечание 1. Леммы 3 и 5 обобщают некоторые вспомогательные утверждения из ([1–6]).

При нечетных n через $M_5(n)$ обозначим множество функций $f \in M_3(n)$, имеющих набор $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{M}_1(f) \cap B^{n,\,(n+1)/2}$ такой, что

$$Z_1(\tilde{\alpha}^*) \cap \mathfrak{M}_0(f) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad Z_1(\tilde{\alpha}^*) \cap \mathfrak{M}_1(f) \neq \varnothing.$$

При нечетных n через $M_6(n)$ обозначим множество функций $f \in M_4(n)$, имеющих набор $\bar{\alpha} \in \mathfrak{M}_0(f) \cap B^{n,(n-[n])/2}$ такой, что

$$Z_0(\bar{\alpha}^*) \cap \mathfrak{M}_0(f) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad Z_0(\bar{\alpha}^*) \cap \mathfrak{M}_1(f) \neq \varnothing.$$

Лемма 6. *При нечетных $n \to \infty$*

$$|M_5(n)| + |M_6(n)| \sim |M(n)|.$$

Теорема 1. *Для почти всех функций $f \in M(n)$.*

$$t_n(f) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 4,$$

где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

Пусть $\varphi(n)$ — положительная целочисленная функция от n, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{cases} \varphi(n) < n \\ \dbinom{\varphi(n)}{\left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]} \geqslant n - \varphi(n). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть

$$C\left(\varphi(n), \left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]\right) = \left\{A\colon A \subseteq \{1, 2, \ldots, \varphi(n)\},\ |A| = \left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]\right\};$$

$\nu\colon \{\varphi(n)+1, \ldots, n-1, n\} \to C\left(\varphi(n), \left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]\right)$ — некоторое инъективное отображение, т. е. $\nu(j) \in C\left(\varphi(n), \left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]\right)$ при $\varphi(n)+1 \leqslant j \leqslant n$, и из $j_1 \neq j_2$ следует, что $\nu(j_1) \neq \nu(j_2)$.

Заметим, что при выполнении неравенств (2) такое инъективное отображение ν существует.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f_{\varphi(n),\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{\left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]+1} \leqslant \varphi(n)} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{\left[\frac{1}{2}\varphi(n)\right]+1}} \vee$$

$$\vee \bigvee_{\varphi(n)+1 \leqslant j \leqslant n} x_j \mathbin{\&} \mathop{\&}_{s \in \nu(j)} x_s.$$

Очевидно, что $f_{\varphi(n),\nu}(\bar{x}) \in M(n)$.

Лемма 7. $t_1(f_{\varphi(n),\nu}) \geqslant 2n - 2\varphi(n)$.

Следствие 3. $t_n(f_{\varphi(n),\nu}) \geqslant 2n - 2\varphi(n)$.

Теорема 2. $2n - 2\log n - \log\log n - O(1) < d_n(M(n)) < 2n - 2\log n + O(1)$.

Верхняя оценка теоремы 2 следует непосредственно из (1), а нижняя оценка получается из следствия 3 при

$$\varphi(n) = \left|\log n + \frac{1}{2}\log\log n + O(1)\right|.$$

Следствие 4. $2n - 2\log n - O(\log\log n) < d_1(M(n)) \leq d_1(P_1(n)) < 2n - 2\log n + O(1)$.

Замечание 2. Рассмотренная выше функция $f_{\varphi(n)}$, впервые была построена в ([7]) с целью получения нижней оценки функции Шеннона для сложности динамических тестов. Из ([7]) следует также, что функция $f_{\varphi(n)}$, при $\varphi(n) = \left[\log n + \frac{1}{2}\log\log n + O(1)\right]$ имеет асимптотически минимальную „активность" (критическую сложность) $\sim\frac{1}{2}\log n$ в классе (монотонных) булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

Институт проблем информатики и автоматизации
Национальной академии наук Армении

Վ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Լրիվ ստուգիչ տեստերի բարդության մասին մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների համար

Ապացուցված է, որ

1) n փոփոխականի համարյա բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների համար $t_n(f) \leq [n/2] + 4$, որտեղ $t_n(f)$-ը f ֆունկցիայի մուտքային փոփոխականների հաստատուն 0 և հաստատուն 1 տիպի սխալները հայտնաբերող մինիմալ լրիվ տեստի բարդությունն է,

2) $2n - 2\log n - O(\log\log n) < d_n(M(n)) < 2n - 2\log n + O(1)$, որտեղ $d_n(M(n))$-ը լրիվ ստուգիչ տեստի բարդության Շեննոնի ֆունկցիան է n փոփոխականի մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների $M(n)$ դասում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. А. Чегис, С. В. Яблонский*, Тр. МИАН СССР. т. 51 (1958). [2] *В. Н. Носков*, Дискретный анализ, Новосибирск, вып. 27 (1975). [3] *Г. Р. Погосян*, О проверяющих тестах для логических схем, ВЦ АН СССР. М., 1982. [4] *А. Д. Коршунов* Проблемы кибернетики, вып. 38 (1981). [5] *V. A. Vardanian*, Lecture Notes in Computer Science, Berlin etc. Springer—Verlag. v. 199 (1985). [6] *В. А. Варданян*. Кибернетика, № 3 (1987). [7] *В. А. Варданян* ДАН АрмССР, т. 80, № 4 (1985).

3—59