ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Н. С. Мелкумяч

Об антиплоском вдавливании двух жестких штампов в упругую полуплоскость с вертикальной выходящей на границу трещиной

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 4/XI 1991)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости ($X\geqslant 0$) с вертикальной конечной трещиной ($0<x<a$), выходящей на границу. На конечных участках горизонтальной границы полуплоскости прикреплены два штампа конечных размеров ($b\leqslant |y|\leqslant c$), симметрично расположенные относительно оси трещины.

Принимается, что на штампы действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации.

Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0<x<\infty$, $0<y>\infty$) со смешанными граничными условиями.

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных и тройных интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

По известным формулам можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

В частности, получены формулы для определения напряжений вне трещины и перемещения ее берегов. Выделена особенность и вычислен коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины.

При приравнивании значения коэффициента интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде.

В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта, при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xz}(0,\ y) = 0, && 0<y<b \\
&u_z(0,\ y) = f_1(y), && b<y<c \\
&\tau_{xz}(0,\ y) = 0, && c<y<\infty \\
&\tau_{zy}(x,\ 0) = f_2(x), && 0<x<a \\
&u_z(x,\ 0) = 0, && a<x<\infty.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье ([1]):

$$
u_z(x,\ y) = \int_0^\infty A(\alpha)\, e^{-\alpha x} \cos \alpha y\, d\alpha + \int_0^\infty C(\beta)\, e^{-\beta y} \cos \beta x\, d\beta. \tag{2}
$$

Тогда для касательных напряжений имеются:

$$
\begin{aligned}
\tau_{zx} &= -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha x} \cos \alpha y\, d\alpha - G \int_0^\infty \beta C(\beta)\, e^{-\beta y} \sin \beta x\, d\beta. \\
\tau_{zy} &= -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha x} \sin \alpha y\, d\alpha - G \int_0^\infty \beta C(\beta)\, e^{-\beta y} \cos \beta x\, d\beta.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). После удовлетворения граничным условиям (1) получается следующая система «тройных» и «парных» интегральных уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos \alpha y\, d\alpha = 0, && 0<y<b \\
&\int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha y\, d\alpha = f_y(y) - \int_0^\infty C(\beta)\, e^{-\beta y}\, d\beta, && b< y<c \\
&-G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos \alpha y\, d\alpha = 0, && c<y>\infty
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \beta C(\beta) \cos \beta x\, d\beta = -\frac{1}{G} f_2(x), && 0<x<a \\
&\int_0^\infty C(\beta) \cos \beta x\, d\beta = -\int_0^\infty A(\alpha)\, e^{-\alpha y}\, d\alpha, && a<x<\infty
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

«Парные» интегральные уравнения, подобные (5), рассматривались в работах ([2–4]) и в других.

При использовании результатов работ ([3, 4]) для функции $C(\beta)$ получается следующее выражение из (5):

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_1(t)\, J_0(\beta t)\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, d\alpha \int_a^\infty t K_0(\alpha t)\, J_0(\beta t)\, dt, \tag{6}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом, $K_0(z)$ — функция Макдональда.

«Тройные» интегральные уравнения, подобные (4), рассматривались в работе ([5]) и в других.

Используя результаты работы ([5]), из (4) получаем:

$$A(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty A_n^* J_{2n-1}(c\alpha); \tag{7}$$

$$A_n = (-1)^{n+1} A_n^*; \tag{8}$$

$$A_n = 2\xi(0)\sin\frac{\lambda}{2} + 4n(1-n)\sin^3\frac{\lambda}{2} \times$$

$$\times \int_0^1 s\xi(s)\, F\left(n+1,\ -n;\ 2;\ s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right) ds; \tag{9}$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi}\int_0^s \frac{\mu\psi'\left[2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right) d\mu\right]}{\sqrt{s^2-\mu^2}} + Q \tag{10}$$

$$b = C\cos\frac{\lambda}{2}; \tag{11}$$

$$\psi'\left[2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right] = -\frac{c}{2}\mu\sin\frac{\lambda}{2}\, f_1\left(c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{c\mu}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty C(\beta)\, e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}\, d\beta, \tag{12}$$

где $F(\alpha, \mu; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд, Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (7) и (10) во второе уравнение из (4), при $y = b$.

Путем подстановки (6) и (8) в (7), с учетом (9), (10), (11) и (12), для определения функции $A(\alpha)$ получается интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода

$$A(\alpha) = \Omega(\alpha) + \int_0^\infty A(\gamma)\, K(\gamma, \alpha)\, d\gamma, \tag{13}$$

где

$$\Omega(\alpha) = 2Q \sin\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{(-1)^{n+1}} +$$

$$+ 2Q \sin^3\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right) J_{2n-1}(c\alpha) -$$

$$-\frac{4c}{\pi}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right) J_{2n-1}(c\alpha] \times$$

$$\times \int_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2-\mu^2}} f_1\left(c - \sqrt{-1-\mu^2 \sin_2\frac{\lambda}{2}}\right) d\mu +$$

$$+ \frac{8c}{\pi^2}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right) \times$$

$$\times J_{2n-1}(c\alpha)\int_0^{\infty} d\beta \int_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2-\mu^2}} e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}} d\mu \int_0^a \varphi_1(t) J_0(\beta t)\, dt; \quad (14)$$

$$K(\gamma, \alpha) = -\frac{8c}{\pi^2}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right) \times$$

$$\times J_{2n-1}(c\alpha)\int_0^{\infty} d\beta \int_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2-\mu^2}} e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}} d\mu \int_a^{\infty} \gamma t K_0(\gamma t) J_0(\beta t)\, dt. \quad (15)$$

Если следовать ([6]) и иметь в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Макдональда для больших α, получается, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} \Omega(\alpha) = 0, \qquad \int_0^{\infty} |K(\gamma, \alpha)|\, d\gamma < 1. \quad (16)$$

Значит, интегральное уравнение (13) можно решить методом последовательных приближений. Далее, по формуле (6) определяется искомая функция $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, напряжения вне трещины и перемещения берегов трещин ($y=0$) определяются формулами:

$$\tau_{zy}(x, 0) = \frac{2}{\pi} Gx \frac{\varphi_1(a)}{a\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{2}{\pi}\frac{Gx}{\sqrt{x^2-a^2}}\int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) K_0(\alpha a)\, d(\alpha) -$$

$$-\frac{2}{\pi} Gx \int_0^a \frac{t\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)}{t^2\sqrt{x^2-t^2}} dt + \frac{2}{\pi} Gx \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \int_a^x \frac{[K_0(\alpha t)]'\, dt}{\sqrt{x^2-t^2}} d\alpha; \quad (17)$$

$$a < x < \infty;$$

$$u_z(x,\,0)=\int_0^{\infty}A(\alpha)e^{-\alpha x}\,d\alpha+\frac{2}{\pi}\int_x^{a}\frac{\varphi_1(t)}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\alpha A(\alpha)\,d\alpha\int_a^{\infty}\frac{tK_0(\alpha t)}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt,\qquad 0<x<a. \tag{18}$$

Коэффициент особенности K_{III} имеет вид

$$K_{III}=\frac{2}{\pi}Gx\left\{\frac{\varphi_1(a)}{a}-\int_0^{\infty}\alpha A(\alpha)K_0(\alpha a)\,d\alpha\right\}. \tag{19}$$

Приравнивая значение коэффициента интенсивности напряжений (19) к критической величине ($K_{III}=K_c$) по теории хрупкого разрушения ([6]), получим выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

Институт механики
Академии наук Армении

Ն. Ս. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Եզր դուրս եկող ուղղաձիգ ճաքով առաձգական կիսահարթության երկու կոշտ դրոշմներով հակահարթ ճնշման մասին

Դիտարկվում է հակահարթ կոնտակտային խնդիր եզր դուրս եկող ուղղաձիգ, վերջավոր ճաքով առաձգական, իզոտրոպ կիսահարթության համար։ Կիսահարթության հորիզոնական եզրում ամրակցված են ճաքի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ վերջավոր չափերի երկու դրոշմներ։

Ընդունված է, որ դրոշմների վրա ազդում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակի հանգեցնող ուժեր։

Ստացված են ճաքից դուրս լարումները և ճաքի ափերի տեղափոխությունները որոշելու համար բանաձևեր։ Հաշվարկված է ճաքի ծայրում լարումների ինտենսիվության գործակիցը և առանձնացված է եզակիությունը։

Ըստ նյութի փխրուն քայքայման տեսության, լարումների ինտենսիվության գործակիցը հավասարեցնելով կրիտիկական արժեքին, ստացվում է բանաձև, որը որոշում է ճաքի տարածումը և նրա կայունությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Новацкий*, Теория упругости, Мир, М., 1975. [2] *Я. С. Уфлянд*, Метод парных уравнений в задачах математической физики, Наука, Л., 1977. [3] *В. С. Тоноян*, Изв АН АрмССР. Механика, т. 21, № 3 (1968). [4] *В. С. Тоноян*, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). [5] *В. С. Тоноян, А. Ф. Минасян*, ДАН АрмССР, т. 62, № 1 (1976). [6] *Г. П. Черепанов*, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974.