

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 629.3.01

М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян

О формуле обращения интегрального уравнения периодических контактных и смешанных задач теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 9 X 1991)

Плоская периодическая контактная задача теории упругости ⁽¹⁾, смешанные задачи о напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с периодической системой коллинеарных трещин, расположенных на одной линии, нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов, а также соответствующие задачи в случае периодической системы абсолютно жестких включений вместо трещин ⁽²⁻⁴⁾ описываются сингулярным интегральным или интегро-дифференциальным уравнением первого рода с ядром Гильберта. Более общее интегральное уравнение с ядром Гильберта методом продолжения в комплексную область рассмотрено в ⁽⁴⁾, где, в частности, приведена формула обращения этого уравнения в указанном случае.

Ввиду важной роли упомянутого интегрального уравнения в контактных и смешанных задачах теории упругости, в настоящей работе способом, аналогичным примененному в ^(1,2), вновь устанавливается его формула обращения. Показывается, что эта формула, которая по своей структуре несколько отличается от приведенных в ^(1,2,4) и которая в ряде случаев может оказаться более удобной, в конечном итоге эквивалентна им.

1. Речь идет об обращении сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Гильберта

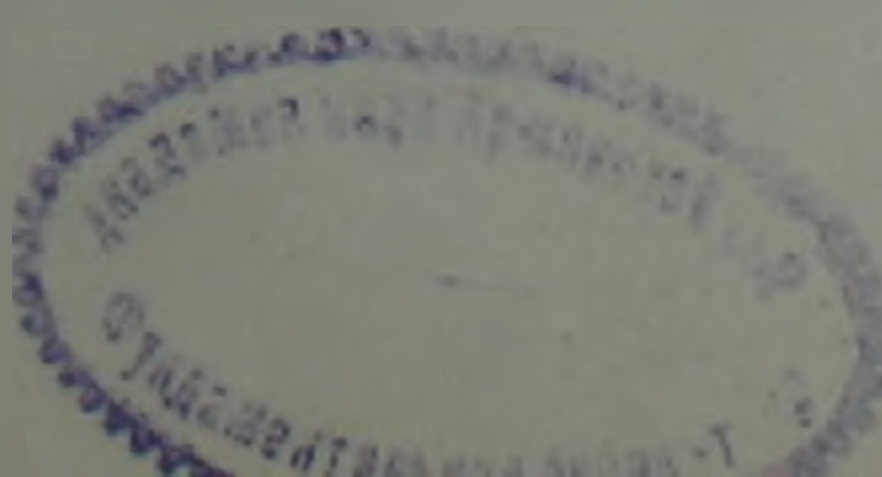
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 < a < \infty), \quad (1.1)$$

где $\varphi(\xi)$ — искомая вещественная функция, а $f(\xi)$ — данная вещественная функция, удовлетворяющая на $(-a, a)$ условию H .

С указанной целью рассмотрим известное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\psi(t) dt}{t - x} = g(x) \quad (1.2)$$

и запишем формулу его обращения ⁽⁵⁾.



$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} g(t) dt}{t - x} + \frac{C}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (1.3)$$

где C —произвольная постоянная. Далее в уравнениях (1.2) и (1.3) перейдем к новым переменным

$$x = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}, \quad a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (-\alpha < \xi, \quad \eta < \alpha)$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t-x} &= \frac{\cos \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\eta}{2} d\eta}{2 \cos^2 \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\eta-\xi}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{\xi-\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\eta}{2} d\eta}{2 \cos^2 \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\eta-\xi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\eta-\xi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) d\eta; \\ \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}} &= \frac{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\xi}{2}}. \end{aligned}$$

В результате уравнение (1.2) перейдет в уравнение (1.1), где

$$\varphi(\xi) = \psi \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right), \quad f(\xi) = g \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) - A_0; \quad (1.4)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} g \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \varphi(\eta) d\eta,$$

а (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \psi \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) &= -\frac{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ &\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta-\xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta - \frac{A_0 \cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ &\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta-\xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} d\eta + \frac{C \cos \left(\frac{\xi}{2} \right)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Легко заметить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\eta}{2} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{2 \sin \frac{\eta - \xi}{2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\eta}{2}} d\eta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x} = -2\pi \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}.$$

с учетом чего (1.5) перейдет в следующее выражение:

$$\varphi(\xi) = - \frac{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{2A_0 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} + \frac{C \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}. \quad (|\xi| < \alpha). \quad (1.6)$$

Теперь при помощи (1.6) в соответствии с формулой (1.4) будем иметь

$$A_0 = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} J(\eta) \sec^2 \frac{\eta}{2} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)} d\eta + \frac{A_0}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} I(\alpha), \quad (1.7)$$

где

$$J(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}},$$

$$I(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{\xi}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} d\xi}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}.$$

Легко видеть, что

$$I(\alpha) = \sec \frac{\alpha}{2} \left[\pi - 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2} (1 + x^2)} \right] =$$

$$= \sec \frac{\alpha}{2} \left[\pi - 2 \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + (1 + a^2) u^2} \right] = \pi \sec \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$(x = au / \sqrt{1 + u^2})$$

Обращаясь к вычислению интеграла $J(\eta)$, представим его в виде

$$J(\eta) = -\sec \frac{a}{2} \sec \frac{\eta}{2} \int_{-a}^a \frac{x dx}{(x-t)(1+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\left(x = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}; \quad t = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}; \quad a = \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right).$$

и в комплексной плоскости $z = x + iy$, разрезанной вдоль отрезка $[-a, a]$ вещественной оси, рассмотрим функцию комплексного переменного $F(z) = z/(z^2 + 1)\sqrt{z^2 - a^2}$. В разрезанной указанным способом плоскости выберем ту однозначную аналитическую ветвь функции $F(z)$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки обладает поведением $F(z) \approx 1/z^2$. Очевидно, что точки $z = \pm i$ являются простыми полюсами для выбранной ветви функции $F(z)$, имеющей в них соответственно главные части $G_{\pm}(z) = 1/(z \pm i) 2i \sqrt{1 + a^2}$. По обобщенной формуле Коши для бесконечной области ((⁶), с. 250–253), ограниченной контуром Γ , применительно к выбранной ветви функции $F(z)$, можно записать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z dz}{(z - \zeta)(z^2 + 1)\sqrt{z^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{\zeta}{(\zeta^2 + 1)\sqrt{\zeta^2 - a^2}} - G_+(\zeta) - G_-(\zeta).$$

Стягивая теперь контур Γ к разрезу $[-a, a]$ и учитывая, что $\sqrt{z^2 - a^2} \rightarrow \pm i \sqrt{a^2 - x^2}$ при ($|x| < a$), $z \rightarrow x \pm i0$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{2x dx}{i(x - \zeta)(1 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{\zeta}{(\zeta^2 + 1)\sqrt{\zeta^2 - a^2}} - \frac{1}{(\zeta^2 + 1)\sqrt{1 + a^2}}.$$

Далее, воспользовавшись известной формулой Сохоцкого—Племеля при ($|t| < a$) $\zeta \rightarrow t + i0$, находим

$$\int_{-a}^a \frac{x dx}{(x - t)(1 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{(1 + t^2)\sqrt{1 + a^2}} \quad (|t| < a)$$

и, следовательно, $J(\eta) = -\pi \cos \frac{\eta}{2}$.

С учетом выражений интегралов $J(\eta)$ и $I(a)$ из (1.7) определяем до сих пор неизвестную постоянную A_0 .

$$A_0 = \frac{\sec(a/2)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(\cos \eta - \cos a)} \sec \frac{\eta}{2} f(\eta) d\eta. \quad (1.8)$$

Внося выражение A_0 из (1.8) в (1.6), окончательно получаем следующую формулу обращения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & - \frac{\cos^2(\xi/2)}{2 \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta + \\ & + \frac{A \sin(\xi/2) + C \cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \quad (1.9) \\ & (A = 2A_0 \cos(\alpha/2), \quad |\xi| < \alpha), \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим, что входящий в (1.9) интеграл легко может быть вычислен, если функцию $f(\xi)$ представить в виде конечного или бесконечного ряда

$$f(\xi) = \sum f_n U_{n-1}(\operatorname{tg}(\xi/2)/\operatorname{tg}(\alpha/2)) \quad (|\xi| < \alpha),$$

где $U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, а затем пользоваться известным интегральным соотношением с ядром Коши, содержащим многочлены Чебышева первого и второго родов. Действительно, возвращаясь к прежним переменным, можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\xi/2)}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta = \\ = \frac{2\cos(\alpha/2)}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} h(t)}{t - x} dt, \end{aligned}$$

где $h(x) = f(2 \operatorname{arctg} x)$.

2. Воспользовавшись элементарным тождеством

$$\frac{\cos^2(\xi/2)}{\cos^2(\eta/2)} \frac{1}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} = - \frac{1}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} + \frac{\sin \frac{\xi + \eta}{2}}{\cos^2(\eta/2)}$$

и учитывая (1.8), формулу (1.9) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & - \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ & \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} f(\eta) d\eta + \frac{C_1 \cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}; \quad (2.1) \\ C_1 = & C - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)} \sec \frac{\eta}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} f(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Здесь C_1 новая произвольная постоянная. Эту постоянную можно выразить через интеграл от функции $\varphi(\xi)$. Действительно, принимая во внимание выражение известного интеграла ((⁷), с. 111), будем иметь

$$I(\xi, \eta) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)} \sin \frac{\eta - \xi}{2}} = \sec \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\eta}{2} \times \\ \times \int \frac{dx}{(t-x) \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}} \ln \left| \frac{D_+(\xi, \eta)}{D_-(\xi, \eta)} \right|, \quad (2.2)$$

где

$$D_{\pm}(\xi, \eta) = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \pm \\ \pm \sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2} \right) \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\eta}{2} \right)}.$$

Теперь обе части (2.1) проинтегрируем по ξ в интервале $(-\alpha, \alpha)$ и с учетом (2.2). В результате получаем

$$C_1 = \frac{P}{\pi}, \quad P = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Таким образом, формулу обращения уравнения (1.1) можно представить также в следующей, эквивалентной (1.9), форме:

$$\varphi(\xi) = \frac{P \cos(\xi/2)}{\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} - \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} f(\eta) d\eta \quad (|\xi| < \alpha). \quad (2.4)$$

Отметим, что формулы обращения уравнения (1.1), приведенные в (¹) (с. 71, формула (334)) и в (²) (с. 125, формула (III. 42)) после элементарных преобразований переходят в (2.4). Отметим еще, что формула (2.48) ((¹), с. 109) при $a = \pi - \alpha$, $b = \pi + \alpha$ после замены переменных $x = \xi + \pi$, $\tau = \eta + \pi$ также переходит в формулу (2.4).

В предельном случае $\alpha = \pi$ уравнения (1.1) и (1.9) или же (2.4) переходят в известные формулы обращения Гильберта (⁸), причем следует учесть условие разрешимости уравнения (1.1) при $\alpha = \pi$.

Институт механики Академии наук Армении

Առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային և խառը խնդիրների ինտեգրալ հավասարման շրջանի բանաձևի մասին

Կոշու և Հիլբերտի կորիզների միջև եղած կապի հիման վրա աշխատանքում ստացված է առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային ու խառը խնդիրներում հաճախ հանդիպող Հիլբերտի կորիզով առաջին սերի եզակի ինտեգրալ հավասարման շրջանի բանաձևը: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ այդ բանաձևը համարժեք է նախկինում ուրիշ հեղինակների կողմից ստացված համապատասխան բանաձևերին, թեև իր կառուցվածքով փոքր ինչ տարբերվում է վերջիններից: Նշվում է նաև, որ ստացված բանաձևը մի շարք դեպքերում ավելի հարմար կարող է լինել:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин, Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976.
3. Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук, Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле, Наукова думка, Киев, 1983.
4. Л. И. Чибрикова Уч. зап. Казанского гос. ун-та, т. 122, кн. 3, с. 95—124 (1962).
5. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Наука, М., 1977.
6. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука М., 1966.
7. В. М. Александров С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983.
8. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968.