ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 94 1993 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

В. В. Восканян, Р. Халди

Расстояние Банаха—Мазура между некоторыми двумерными нормированными пространствами

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 1/VII 1991)

В настоящей статье, опираясь на общую формулу расстояния между полиэдральными пространствами, полученную в работе [1] одним из авторов, вычисляется расстояние между l_1^2 и произвольным шестиугольным пространством Y_6.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Расстоянием Банаха—Мазура между изоморфными банаховыми пространствами X и Y называется число $d(X, Y) = \inf\|T\|\|T^{-1}\|$, где $\inf$ берется по всем изоморфизмам $T: X \to Y$.

Определение 2. Конечномерное вещественное пространство называется полиэдральным, если его единичный шар $S(X) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ является многогранником, т. е. выпуклой оболочкой конечного множества точек.

Впередь мы будем отождествлять всякое n-мерное полиэдральное пространство X как линейное, с арифметическим пространством R^n. Тогда единичный шар $S(X)$ представит собой выпуклый симметричный относительно нуля n-мерный многогранник со множеством вершин, т. е. крайних точек, вида $Ext\, S(X) = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_r\}$, где $r \geqslant n$. Таким образом, каждое n-мерное полиэдральное пространство можно задавать с помощью $r \times n$ $(r \geqslant n)$ матрицы A крайних точек, т. е. матрицы, у которой i-я строка составлена из координат вектора e_i, $i = 1, \ldots, r$.

В статье [1] расстояние Банаха—Мазура между полиэдральными пространствами выписывается в виде экстремальной задачи, задаваемой лишь с помощью соответствующих матриц крайних точек. Имеет место следующее

Утверждение. *Пусть X и Y полиэдральные пространства размерности n, $Ext\, S(X) = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_r\}$, $Ext\, S(Y) = \{\pm k_1, \ldots, \pm k_s\}$, где $e_i = (\alpha_{ij})_{j=1}^n$, $i = 1, \ldots, r$, $k_i = (\beta_{ij})_{j=1}^n$, $i = 1, \ldots, s$. Обозначим соответствующие матрицы $A = \{\alpha_{ij}\}_{i=1,\ldots,r}^{j=1,\ldots,n}$, $B = \{\beta_{ij}\}_{i=1,\ldots,s}^{j=1,\ldots,n}$.*

Тогда

$$d(X, Y) = \inf_{\Delta} \{ (\max_{1 \le i \le r} \min_{\widetilde{B}} \| A_i \Delta \widetilde{B}^{-1} \|_1) (\max_{1 \le i \le s} \min_{\widetilde{A}} \| B_i \Delta^{-1} \widetilde{A}^{-1} \|_1) \}, \quad (1)$$

где $\widetilde{A}$ (соответственно $\widetilde{B}$) пробегает множество обратимых $n \times n$ подматриц матрицы $A(B)$, а $A_i(B_i)$ обозначает i-ую вектор-строку матрицы $A(B)$. Δ пробегает множество обратимых $n \times n$ матриц, $\|\cdot\|_1$ обозначает l_1 норму n-мерного вектора.

Как указывалось, целью настоящей статьи является вычисление расстояния $d(X, Y)$ для случая, когда $X = l_1^2$, т. е. двумерный аналог вещественного пространства l_1, а $Y = Y_6$ — шестиугольное пространство, т. е. такое двумерное пространство, у которого единичный шар $S(Y)$ — шестиугольник (аналогично, l_1^2 можно называть четырехугольным пространством).

Интерес к этому наиболее простому, но не тривиальному случаю стимулирован двумя соображениями. Во-первых, аналитическая техника решений получаемой цепочки экстремальных задач может быть использована и для более общих случаев. (Поэтому мы и не касаемся возможного в двумерном случае чисто геометрического доказательства, которое, впрочем, вряд ли короче). Во-вторых, из получаемой формулы расстояния (13) следует один результат Асплунда (см. ([2])):

$$d(l_1^2, G_6) = \frac{3}{2}, \quad (2)$$

если $S(G_6) = P_6$ — правильный шестиугольник.

В. Стромквист в работе ([3]) использовал этот результат для нахождения двумерного вещественного компакта Минковского:

$$\operatorname{diam} \mathfrak{M}_2 = \sup \{ d(X, Y) : \dim X = \dim Y = 2 \} = \frac{3}{2}, \quad (3)$$

причем верхняя грань в (3) достигается лишь (с точностью до изометрических образов) для указанной в (2) пары.

Постановка экстремальной задачи. Единичный шар $S(l_1^2)$ есть квадрат с вершинами $\pm e_1$ и $\pm e_2$, где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Таким образом, в качестве матрицы крайних точек шара $S(l_1^2)$ можно взять единичную матрицу, т. е. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пространство Y_6 определено с точностью до изометрии, поэтому можно считать, что шестиугольник $S(Y_6)$ имеет вершинами векторы $\pm k_i$, $i = 1, 2, 3$, где $k_1 = (1, 0)$, $k_2 = (0, 1)$, $k_3 = (\beta_1, \beta_2)$, причем

$$\beta_1, \beta_2 > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 1, \quad |\beta_1 - \beta_2| < 1. \quad (4)$$

Неравенства (4) очевидны из геометрических соображений, они получаются также из следующей несложной, но полезной теоремы, характеризующей матрицу крайних точек произвольного полиэдрального пространства.

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица* $B = (B_1, \dots, B_s)^T$ *размерности* $s \times n$ *и ранга* n $(s \geqslant n$, B_i *— i-я строка), была матрицей крайних точек для некоторого n-мерного полиэдрального пространства* Y, *необходимо и достаточно, чтобы для любой обратимой* $n \times n$ *подматрицы* $\tilde{B} = (B_{i_1}, \dots B_{i_n})^T$ *матрицы* B *и для любого* $i = 1, \dots, s$, $i \neq i_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\| B_i \tilde{B}^{-1} \|_1 > 1. \tag{5}$$

Действительно, матрица B будет матрицей крайних точек для некоторого пространства Y в том и только том случае, если любая ее вектор-строка B_i будет вершиной многогранника $P = S(Y) = co\{\pm B_1, \dots, \pm B_s\}$. Поэтому каждый вектор B_i не является абсолютно выпуклой комбинацией остальных B_j, $j \neq i$. Значит, если B_i есть вершина, а $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ — произвольная линейно независимая система строк-векторов, не содержащая B_i (соответствующую подматрицу обозначим через $\tilde{B}$), то в представлении

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_j B_{i_j} \quad \text{обязательно} \quad \sum_{j=1}^{n} |\tau_j| > 1. \tag{6}$$

Обозначив $d = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, имеем $B_i = d\tilde{B}$, откуда $d = B_i \tilde{B}^{-1}$, и из (6) следует (5).

Обратно, если B_i не есть вершина многогранника P, то в силу $B_i \in P$ найдется число $\delta \geqslant 1$ такое, что вектор δB_i лежит на $(n-1)$-мерной грани P' многогранника P. По теореме Каратеодори найдутся n линейно независимых вершин грани P', а значит и вершин многогранника P ($+$ или $-$) $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ таких, что $\delta B_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j B_{i_j}$, где $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = 1$. Опять же обозначив $\tilde{B} = (B_{i_1}, \dots, B_{i_n})^T$, аналогичными рассуждениями получим $\| B_i \tilde{B} \|_1 \leqslant 1$. Теорема доказана.

Итак, матрица крайних точек шестиугольника $S(Y_0)$ имеет вид $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, где β_1, β_2 удовлетворяют условиям (4). Формула для расстояния (1), которую мы хотим вычислить, приобретает следующий вид:

$$d(l_1^2, Y_0) = \inf_{\Delta} \{ (\max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \min_{1 \leqslant j \leqslant 3} \| A_i \Delta \tilde{B}^j \|_1) (\max_{1 \leqslant k \leqslant 3} \| B_k \Delta^{-1} \|_1) \}. \tag{7}$$

где

$$A_1 = B_1 = (1,\ 0), \qquad A_2 = B_2 = (0,\ 1), \qquad B_3 = (\beta_1,\ \beta_2)$$

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Нижняя грань в (7) берется по всем матрицам $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_3 \\ \delta_2 & \delta_4 \end{pmatrix}$ с детерминантом $|\Delta| = \delta_1 \delta_4 - \delta_2 \delta_3 \neq 0$.

Редукция задачи к частным случаям. Во-первых, отметим, что можно рассматривать не все множество D обратимых операторов (матриц) Δ. Для этого рассмотрим всевозможные (линейные) изометрии $J: l_1^2 \to l_1^2$. Легко видеть, что каждая такая изометрия имеет матричное представление вида $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ либо вида $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $\varepsilon_i = 1$ или -1, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что умножение справа изометрии J на оператор T приводит к умножению вектора-столбца матрицы T на -1 либо к перестановке столбцов этой матрицы. Так как $\|T\| \|T^{-1}\| = \|TJ\| \|(TJ)^{-1}\|$, то это нам позволит рассматривать лишь обратные матрицы $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_3 \\ \delta_2 & \delta_4 \end{pmatrix}$, $\Delta^T = T$, принадлежащие одному из следующих трех множеств:

$$D_1 = \{\Delta \in D:\ \delta_1 \geqslant 0,\ \ \delta_2 \leqslant 0,\ \ \delta_3 \geqslant 0,\ \ \delta_4 \leqslant 0\},$$
$$D_2 = \{\Delta \in D:\ \delta_1 \geqslant 0,\ \ \delta_2 \geqslant 0,\ \ \delta_3 \geqslant 0,\ \ \delta_4 \geqslant 0\},$$
$$D_3 = \{\Delta \in D:\ \delta_1 \geqslant 0,\ \ \delta_2 \leqslant 0,\ \ \delta_3 \geqslant 0,\ \ \delta_4 \geqslant 0\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$g(\Delta) = g(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \frac{1}{|\Delta|} \max\left(\min_{1<j<3} \psi_j(\Delta) \cdot \min_{1<j<3} \gamma_j(\Delta)\right) \max_{1<j<3} h_j(\Delta), \tag{9}$$

где

$$\varphi_j(\Delta) = \|A_1 \Delta \widetilde{B}_j\|_1, \qquad \psi_j(\Delta) = \|A_2 \Delta \widetilde{B}_j\|_1, \qquad h_j(\Delta) = |\Delta| \|B_j \Delta^{-1}\|_1, \tag{10}$$
$$j = 1,\ 2,\ 3.$$

Формула расстояния (7) в обозначениях (9) и (10) примет вид

$$d(l_1^2,\ Y_0) = \inf_{\Delta \in D} g(\Delta) = \min_{1<i<3} \left(\inf_{\Delta \in D_i} g(\Delta)\right). \tag{11}$$

Приведем теперь без доказательств ряд утверждений, последовательно сужающих множество минимизаций. Общее в схеме доказательств то, что на указанных подмножествах легко находятся $\max \varphi_i$ и ψ_i; далее, по произвольной точке Δ из рассматриваемого множества строится (не тривиальным образом) точка $\widetilde{\Delta}$ редуцируемого множества такая, что $g(\Delta) \geqslant g(\widetilde{\Delta})$. Inf повсюду берется по переменной Δ.

Утверждение 1. $\inf\limits_{D_1} g = \inf\limits_{D_1^+} g \geqslant \inf\limits_{D_3} g$, где $D_1^+ = \{\Delta \in D_1 : |\Delta| > 0\}$.

Утверждение 2. *Обозначим* $D_3^+ = \left\{\Delta \in D_3;\ \delta_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\delta_4 \geqslant 0\right\}$, *и пусть* $\inf\limits_{D_3^+} g = f(\beta_1, \beta_2)$. *Тогда*

$$\inf_{D_3} g = f\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \quad и \quad \inf_{D_1} g = \min\left(f(\beta_1, \beta_2), f(\beta_2, \beta_1)\right).$$

Утверждение 3. $\inf\limits_{D_3^+} g = \inf\limits_{\Pi} g$, *где* $\Pi = \{\Delta \in D_3^+ : \varphi_1(\Delta) = \varphi_2(\Delta)\}$.

На гиперплоскости Π выразим переменную δ_3 через другие. Тогда задача минимизации на множестве Π приобретает следующий вид:

$$g(\Delta) = g(\delta_1, \delta_2, \delta_4) = \frac{(\delta_1 - \delta_2)\max(h_i(\Delta),\quad i = 1, 2, 3)}{\delta_4(\delta_1 - k\delta_2) - \delta_2(\delta_1 - \delta_2)} \to \inf,$$

где $k = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_2}$, $\quad h_1 = \delta_4 - \delta_2$, $\quad h_2 = 2\delta_1 - \delta_2 + k\delta_4$, $\quad h_3 = 2\beta_2\delta_1 - (\beta_1 + \beta_2)\delta_2 - \delta_4$, при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered}\delta_1 \geqslant 0,\quad \delta_2 \leqslant 0,\quad \delta_4 \geqslant 0,\quad \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{\beta_2}\delta_4 \geqslant 0,\\ \delta_4(\delta_1 - k\delta_2) - \delta_2(\delta_1 - \delta_2) \neq 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Обозначим через $\bar{\Pi}$ множество в R^3, определяемое условиями (12), и пусть

$$\Pi_{ij} = \{\Delta \in \bar{\Pi} : h_i(\Delta) = h_j(\Delta) \geqslant h_k(\Delta),\quad i \neq j,\quad i, j, k = 1, 2, 3\}.$$

Утверждение 4. *Если точка* $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_4) \in \bar{\Pi}$ *такова, что* $\delta_1 > 0$ *и* $\Delta \notin \Pi_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, *то в ней функция* g *не принимает минимального на* $\bar{\Pi}$ *значения.*

Заметим, что это можно доказать, показав, что при указанных условиях функция $f(\varepsilon) = g(\delta_1 + \varepsilon, \delta_2, \delta_4)$ не имеет в нуле минимума.

Следующие утверждения имеют общую схему доказательства: однородность функции g приводит к минимизации функции лишь одной переменной на отрезке, причем минимум достигается на концах отрезка.

Утверждение 5.

$$\inf\{g(\Delta) : \Delta \in \bar{\Pi},\ \delta_1 = 0\} = f_1(\beta_1, \beta_2) = 1 + \left(\frac{1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2 + 1}\right)^{-1}.$$

Утверждение 6. *Обозначим*

$$f_2(\beta_1, \beta_2) = 1 + \left(\frac{\beta_2}{1 - \beta_2 + \beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} \right)^{-1},$$

$$f_3(\beta_1, \beta_2) = 1 + \left(\frac{\beta_2 - 1}{1 - \beta_2 + \beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 + \beta_1 - 1} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\inf\{g(\Delta) \colon \Delta \in \Pi_{12}\} \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} f_i(\beta_1, \beta_2).$$

Утверждение 7. $\inf\{g(\Delta) \colon \Delta \in \Pi_{13} \cup \Pi_{23}\} \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} f_i(\beta_1, \beta_2)$.

Непосредственно проверяется следующее

Утверждение 8.

$$f_1\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_1(\beta_1, \beta_2), \qquad f_2\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_1(\beta_2, \beta_1).$$

Обозначим $f_3\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_4(\beta_1, \beta_2)$. *При* $\beta_1 \geqslant$ *(соответственно* $\leqslant$*)* β_2 $f_i(\beta_1, \beta_2) \leqslant (\geqslant) f_i(\beta_2, \beta_1)$, $i = 1, 3$; $f_j(\beta_1, \beta_2) = f_j(\beta_2, \beta_1)$, $j = 2, 4$. *На множестве* U, *порожденном ограничениями* (4) *и неравенством* $\beta_1 \geqslant \beta_2$, *имеет место равенство*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 3} f_i(\beta_1, \beta_2) = \begin{cases} f_4(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \beta_1 \leqslant \dfrac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \\ f_1(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \dfrac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \leqslant \beta_1 \leqslant \\ & \leqslant \left(\dfrac{1}{2} - \left(\beta_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} \\ f_2(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \beta_2 \geqslant \dfrac{1 + \beta_1^2}{1 + \beta_1} \\ f_3(\beta_1, \beta_2) & \text{в оставшейся части } U. \end{cases}$$

Формула расстояния.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\beta_1 \geqslant \beta_2$, ибо при противоположном неравенстве получается изометричный образ. Объединяя утверждения 1—8 с (11), мы приходим к следующей формуле расстояния.

Теорема 2. *Пусть* Y_6 *— произвольное шестиугольное пространство. Не нарушая общности, можно считать, что*

$$\operatorname{Ext} Y_6 = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(\beta_1, \beta_2)\},$$

где $\beta_1 \geqslant \beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 1$, $\beta_1 - \beta_2 < 1$. *Тогда*

$$
d(l_1^2,\ Y_6)=\begin{cases}
1+\left(\dfrac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1-\beta_2+1}+\dfrac{1}{\beta_2-\beta_1+1}+\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)^{-1} \\
\qquad \text{при } \beta_1\leqslant\dfrac{1+\beta_2^2}{1+\beta_2} \\
1+\left(\dfrac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1+1}+\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)^{-1} \\
\qquad \text{при } \dfrac{1+\beta_2^2}{1+\beta_2}\leqslant\beta_1\leqslant\left(\dfrac{1}{2}-\left(\beta_2-\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2} \\
1+\left(\dfrac{\beta_2}{\beta_1-\beta_2+1}+\dfrac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1+1}\right)^{-1} \\
\qquad \text{при } \beta_2\geqslant\dfrac{1+\beta_1^2}{1+\beta_1} \\
1+\left(\dfrac{\beta_2-1}{\beta_1-\beta_2+1}+\dfrac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1+1}+\dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)^{-1} \\
\qquad \text{в оставшейся части } U.
\end{cases} \tag{13}
$$

Как указывалось, диаметр двумерного компакта Минковского, найденный В. Стромквистом, равен 3/2. Обозначим через Y_6^β однопараметрическое семейство шестиугольных пространств, получающееся при $\frac{1}{2}<\beta=\beta_1=\beta_2=1$. Из формулы (13) вытекает

Следствие 1. *Для любого* $\alpha\in\left]1,\ \frac{3}{2}\right]$ *существует* $\beta\in\left]\frac{1}{2},\ 1\right[$ *такое, что* $d(l_1^2,\ Y_6^\beta)=\alpha$.

Отметим, что шестиугольник $S(Y_6^1)$ (единственный из рассмотренных) является изометричным образом правильного шестиугольника. Такой изометрией будет, например, оператор I: $R^2\to R^2$, определенный равенствами: $I(1,0)=\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $I(0,1)=\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Таким образом, из формулы (13) вытекает следствие, содержащее один результат Асплунда [2].

Следствие 2. *Из всех шестиугольных пространств наиболее удаленным от* l_1^2 *является пространство* G_6, *порожденное правильным шестиугольником, и* $d(l_1^2,\ G_6)=\frac{3}{2}$.

Ереванский государственный университет
Аннабинский университет (Алжир)

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ, Ռ. ԽԱԼԴԻ

Որոշ երկչափանի նորմավորված տարածությունների միջև Բանախ-Մազուրի հեռավորությունը

Հիմնվելով պոլիէդրալ տարածությունների միջև Բանախ—Մազուրի հեռավորության բանաձևի վրա, հաշվվում է երկչափանի նորմավորված այն տարածությունների միջև հեռավորությունը, որոնց միավոր գնդերը համապատասխանաբար քառակուսի և վեցանկյուն են։

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է համարել, որ վեցանկյան գագաթներն են (1,0), (0,1) և (β_1, β_2) վեկտորները, որտեղ β_1, β_2-ը բավարարում են բնական սահմանափակումների։ Ի դեպ ապացուցվում է նաև մի ընդհանուր թեորեմ, որը նկարագրում է կամայական n-չափանի պոլիէդրալ տարածության միավոր գնդի ծայրային կետերը ներկայացնող մատրիցը։ β_1, β_2 փոփոխականների ֆունկցիայի տեսքով ստացված հեռավորության բանաձևից բխում է երկու հետևանք։ Նշենք երկրորդը, որը պարունակում է Ասպլունդի մի մասնավոր արդյունք.

Բոլոր վեցանկյուն տարածություններից l_1^2-ից ամենահեռու կանոնավոր վեցանկյունով ծնված G_6 տարածությունն է, ընդ որում $d(l_1^2, G_6) = \frac{3}{2}$;

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Восканян*, Изв. АН АрмССР, т. 25, № 3, с. 284—292 (1990). [2] *E. Asplund*, Math. Scand., v. 8, p. 171—180 (1960). [3] *W. Stromquist*, Math. Scand., v. 48, p. 205—225 (1981).