ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 529.3.01

С. М. Мхитарян

О спектральных соотношениях для интегральных операторов с логарифмическими ядрами, встречающихся в контактных и смешанных задачах теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 15/XI 1991)

Многие контактные и смешанные задачи теории упругости и теории вязкоупругости сводятся к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям с логарифмическими ядрами ([1–3]). Их решения часто проще и эффективнее построить при помощи спектральных соотношений для соответствующих интегральных операторов, чем другими методами. Обширный класс спектральных соотношений в ортогональных многочленах для интегральных операторов, встречающихся в разнообразных областях механики деформируемого тела и математической физики, приведен в ([4,5]). Кроме того, такие соотношения получены в ([6]), а также в работах ([7–11]).

В настоящей статье методами теории логарифмического потенциала устанавливаются спектральные и родственные с ними соотношения для интегральных операторов, порожденных логарифмическими ядрами, которые играют важную роль в контактных и смешанных задачах механики деформируемого тела и в смежных отраслях математической физики.

1. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_L \ln \frac{1}{|x-u|} \varphi(u)\,du = f(x) \tag{1.1}$$

при условии

$$\int_L \varphi(x)\,dx = P < \infty, \tag{1.2}$$

где $\varphi(x) \in L^2_\omega(L)$ $(\omega(x) > 0)$, $f(x) \in L^2(L)$, L — отрезок или совокупность отрезков горизонтальной оси Ox плоскости, отнесенной к правой прямоугольной декартовой системе координат Oxy. При помощи логарифмического потенциала простого слоя

$$U(x, y) = \int_L \ln \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + y^2}} \varphi(u)\, du \tag{1.3}$$

решение уравнения (1.1) при условии (1.2) можно свести к решению следующей внешней краевой задачи ([1]):

$$\begin{gathered} \Delta U = 0 \quad ((x, y) \in \Pi \setminus L, \quad \Pi = \{r > 0\}); \\ U(x, y)|_{y=0} = f(x) \quad (x \in L); \\ U(x, y) \simeq P \ln \frac{1}{r} \quad (r \to \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}). \end{gathered} \tag{1.4}$$

После решения краевой задачи (1.4) плотность источников — решение уравнения (1.1) определится по известной формуле

$$-\pi\gamma(x) = \lim_{y \to 0} \operatorname{sgn} y \frac{\partial U}{\partial y} \quad (x \in L). \tag{1.5}$$

Чтобы иметь дело с регулярной на бесконечности внешней краевой задачей, от функции $U(x, y)$ перейдем к функции ([1])

$$V(x, y) = U(x, y) - P \ln \frac{1}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \tag{1.6}$$

Тогда вместо (1.4) будем иметь следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} \Delta V = 0 \quad ((x, y) \in \Pi \setminus L); \\ V(x, y)|_{y=0} = f(x) - P \ln \frac{1}{|x|} \quad (x \in L); \\ V(x, y) \to 0 \quad (r \to \infty); \end{gathered} \tag{1.7}$$

а вместо (1.5) — формулу

$$-\pi\varphi(x) = \lim_{y \to 0} \left\{ \operatorname{sgn} y \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \pi P \delta(x) \right] \right\} \quad (x \in L), \tag{1.8}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Далее конкретно рассмотрим два случая, когда

1) $L = \{y = 0; \ |x| \leqslant a\}$; 2) $L = \{y = 0; \ |x| \geqslant a\}$.

Сначала рассмотрим случай конечного отрезка L, т. е. первый случай. Как в ([1]), комплексную плоскость $z = x + iy$ с разрезом вдоль L при помощи функции Жуковского

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}, \tag{1.9}$$

отобразим на единичный круг $\rho < 1$ плоскости ζ, причем будем иметь

$$x = \frac{a\xi}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta,$$

$$y = \frac{a\eta}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta. \qquad (1.10)$$

При указанном отображении верхний и нижний берега разреза L переходят, соответственно, в нижнюю и верхнюю полуокружности $\rho = 1$, а точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = 0$. Исходя из последнего, при помощи (1.10) находим

$$\frac{1}{r} = \frac{2\rho}{a}(\rho^4 + 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1)^{-1/2},$$

откуда вытекает, что $1/r \simeq 2\rho/a$ $(\rho \to 0)$. Поэтому, предполагая, что как обычно, плотность источников логарифмического потенциала (1.3) обладает конечной мощностью, т. е. имеет место условие (1.2), в соответствии с (1.6) введем в рассмотрение функцию

$$W(\rho, \vartheta) = U_0(\rho, \vartheta) - P\ln\left(\frac{2\rho}{a}\right), \qquad (1.11)$$

$$U_0(\rho, \vartheta) = U\left(\frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta,\ \frac{a}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta\right).$$

Тогда краевая задача (1.7) преобразуется в следующую задачу Дирихле для единичного круга:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2} = 0 \qquad (\rho < 1,\ -\pi < \vartheta \leqslant \pi);$$

$$W(0, \vartheta) = 0; \quad W(1, \vartheta) = f_0(\vartheta) - P\ln\frac{2}{a}; \quad f_0(\vartheta) = f(a\cos\vartheta). \qquad (1.12)$$

При этом формула (1.5) с учетом (1.11) перейдет в формулу $(x = a\cos\vartheta,\ -\pi < \vartheta \leqslant \pi)$

$$\varphi(x) = \left(\pi a|\sin\vartheta|\right)^{-1}\left[P + \frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial\rho}\right]_{\rho=1}. \qquad (1.13)$$

Решение краевой задачи (1.12), построенное в ([1]) методом разделения переменных, имеет вид $(n = 1, 2, \ldots)$

$$W(\rho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \cos n\vartheta \quad (-\pi < \vartheta \leqslant \pi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \qquad P = \left(2\pi\ln\frac{2}{a}\right)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Рассмотрим одну гармонику $W_n(\rho, \vartheta) = \rho^n\cos n\vartheta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полученного потенциала, а также его нулевую гармонику $W_0(\rho, \vartheta) \equiv 0$.

Вычислив по формуле (1.13) соответствующую плотность источников, находим

$$\varphi(a\cos\theta) = \begin{cases} n\cos n\theta\,(\pi a\sin\theta)^{-1} & (n = 1,\ 2,\ \ldots) \\ P\,(\pi a\sin\theta)^{-1} & (n = 0;\quad 0 < \theta < \pi). \end{cases} \tag{1.14}$$

Учитывая (1.11), выражения указанной гармоники при $\rho = 1$ и соответствующей ей плотности источников из (1.14) подставим в (1.3). В результате придем к следующим спектральным соотношениям ($T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-u|}\,\frac{T_n(u/a)\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} n^{-1}T_n(x/a)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots); \\ \ln(2/a)\ (n = 0,\ |x| < a); \end{cases} \tag{1.15}$$

полученным в ([12]) другим методом.

Чтобы получить родственные с (1.15) соотношения, дающие выражения интегралов на лучах $|x| > a$, заметим, что согласно (1.10) лучу $x > a$ соответствует значение $\theta = 0$, а лучу $x < -a$ — значение $\theta = \pi$; следовательно

$$|x| = \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \qquad (0 < \rho \leqslant 1),$$

откуда

$$\rho = (|x| - \sqrt{x^2 - a^2})/a \qquad (|x| \geqslant a). \tag{1.16}$$

Подставляя в (1.3) значения указанной гармоники потенциала при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и выражение $\varphi(x)$ из (1.14), с учетом (1.11) и (1.16) получим следующие интегральные соотношения ($H(x)$ — функция Хевисайда, $n = 1,\ 2, \ldots$);

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-u|}\,\frac{T_n(u/a)\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[H(x) + (-1)^n H(-x)\right]\left[(|x| - \sqrt{x^2-a^2})/a\right]^n; \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-u|}\,\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \ln\left[2(|x| - \sqrt{x^2-a^2})/a^2\right] \qquad (|x| > a).$$

Соотношения (1.15) и (1.17) после дифференцирования их обеих частей по переменной x переходят в соответствующие интегральные соотношения с ядром Коши.

2 Обращаясь ко второму случаю, решение краевой задачи (1.7), как выше, опять построим методом разделения переменных, для чего опять воспользуемся конформным отображением (1.9). При помощи (1.9) плоскость $z = x + iy$ с исключенными лучами $|x| \geqslant a$ вещественной оси отобразится на верхнюю полуплоскость $\eta > 0$, причем

полуплоскость $y>0$ отобразится на полукольцо $\{\rho>1,\ 0<\theta<\pi\}$, а полуплоскость $y<0$ — на полукруг $\{\rho<1,\ 0<\theta<\pi\}$ плоскости ζ. Отметим, что верхнему берегу разреза l по лучу $x>a$ $(x<-a)$ соответствует луч $\xi>1$ $(\xi<-1)$, а нижнему берегу разреза L по лучу $x>a$ $(x<-a)$ интервал $0<\xi<1$ $(-1<\xi<0)$.

Краевая задача (1.7), сформулированная в координатах ξ, η для полуплоскости $\eta>0$, обладает нормальным решением вида

$$V_0(\xi,\ \eta)=e^{-\lambda\eta}\begin{cases}\cos(\lambda\xi)\\ \sin(\xi)\end{cases}\quad(\lambda>0,\quad -\infty<\xi<\infty,\quad \eta>0);$$

$$V_0(\xi,\ \eta)=V\left(\frac{a\xi}{2}\left(1+\frac{1}{\xi^3+\eta^2}\right),\quad \frac{a\eta}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\right)\right). \tag{2.1}$$

Соответствующую потенциалу (2.1) плотность источников можно вычислить по формуле (1.8), если при ее преобразовании, как выше, учесть, что в данном случае согласно (1.10)

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{2}{a}\,\frac{\xi^2}{|\xi^2-1|}\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial V_0}{\partial\eta}\quad\left(x=\frac{a}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\right).$$

Далее, приняв во внимание (1.3), (1.6) и поступив совершенно аналогично изложенному выше, придем к следующим четырем спектральным соотношениям:

$$\frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{\infty}\right)\ln\frac{|x|}{|x-u|}\,w_{\pm}(u)\begin{cases}\cos(\lambda\rho_{\pm}(u))\\ \operatorname{sgn}u\sin(\lambda\rho_{\pm})u))\end{cases}du=$$

$$=\frac{a}{\lambda}\begin{cases}\cos(\lambda\rho_{\pm}(x))\\ \operatorname{sgn}x\sin(\lambda\rho_{\pm}(x));\end{cases} \tag{2.2}$$

$$w_{\pm}(x)=\frac{|x|\pm\sqrt{x^2-a^2}}{2\sqrt{x^2-a^2}};\qquad \rho_{\pm}(x)=\frac{|x|\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$(\lambda>0,\quad |x|>a).$$

Ими даются обобщенные собственные функции интегрального оператора

$$K\varphi=\frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{\infty}\right)\ln\left|\frac{x}{x-u}\right|\varphi(u)\,du.$$

Так как интервалу $L'=\{y=0:\ -a<x<a\}$ соответствует полуокружность $\{\rho=1,\ 0<\theta<\pi\}$ плоскости ζ, то родственные с (2.2) интегральные соотношения имеют вид $(|x|<a,\quad \lambda>0)$

$$\frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{\infty}\right)\ln\left|\frac{x}{x-u}\right|\tilde{w}_{\pm}(u)\left|\begin{array}{l}\cos(\lambda\rho_{\pm}(u))\\ \operatorname{sgn} u\sin(\lambda\rho_{\pm}(u))\end{array}\right.du=$$

$$=\frac{a}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left|\begin{array}{l}\cos(\lambda x/a);\\ \sin(\lambda x/a).\end{array}\right.$$

Отметим, что указанный интегральный оператор K согласно (2.2) обладает двукратным сплошным спектром.

Спектральные соотношения (2.2) можно записать в более компактной форме, если в них от косинусов и синусов перейти к экспоненциальной функции. Эти соотношения можно преобразовать также на полубесконечном интервале (a, ∞). А имено, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\infty}\ln\frac{x^2}{|x^2-u^2|}\tilde{w}_{\pm}(u)\cos(\lambda\tilde{\rho}_{\pm}(u))\,du=\frac{a}{\lambda}\cos(\lambda\tilde{\rho}_{\pm}(x));\qquad(2.3)$$

$$(x>0,\quad x>a)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{a}^{\infty}\ln\frac{x+u}{|x-u|}\tilde{w}_{\pm}(u)\sin(\lambda\tilde{\rho}_{\pm}(u)\,du=\frac{a}{\lambda}\sin(\lambda\tilde{\rho}_{\pm}(x));$$

$$\tilde{w}_{\pm}(x)=\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{2\sqrt{x^2-a^2}};\qquad\tilde{\rho}_{\pm}(x)=\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}\quad(x>a).\qquad(2.4)$$

Дифференцирование обеих частей (2.2)—(2.4) по переменной x приводит к соотношениям, содержащим ядро Коши и аналогичные ядра.

Заметим, что при помощи замены переменных $x=ae^{\xi/2}$, $u=ae^{\eta/2}$ $(0<\xi,\ \eta<\infty)$ из (2.4) можно получить новые спектральные соотношения для ядра $\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\xi-\eta}{4}\right|$ на полубесконечном интервале.

В заключение отметим, что формулы разложения произвольной функции по обобщенным собственным функциям, дающимся спектральными соотношениями (2.)—(2.4), можно получить из соответствующих формул разложения этой функции в интеграл Фурье.

Институт механики
Академии наук Армении

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Առաձգականության տեսության կոնտակտային և խառը խնդիրներում հանդիպող լոգարիթմական կորիզներով ինտեգրալ օպերատորների համար սպեկտրալ առնչությունների մասին

Աշխատանքում լոգարիթմական պոտենցիալի մեթոդների օգնությամբ ստացված է առաձգականության տեսության, ինչպես նաև առաձգամածու-

ցիկության տեսության, կոնտակտային և խառը եզրային խնդիրներում հաճախ հանդիպող լոգարիթմական կորիզներով ծնվող ինտեգրալ օպերատորների համար սպեկտրալ և ազգակից ինտեգրալ առնչությունների մի դաս։ Այդ առնչությունները վերջավոր ինտերվալի դեպքում պարունակում են Չեբիշևի առաջին սեռի օրթոգոնալ բազմանդամներ, իսկ երկու միատեսակ և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ դասավորված կիսաանվերջ ինտերվալների դեպքում—փոփոխված արգումենտով եռանկյունաչափական սինուս և կոսինուս ֆունկցիաներ։ Ստացված առնչությունները, որոնք ներկայացնում են ինքնուրույն մաթեմատիկական հետաքրքրություն, հնարավորություն են տալիս կառուցելու կոնտակտային և խառը խնդիրների բավականին լայն դասի ուղղիչ ինտեգրալ և ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների պարզ և արդյունավետ լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Я. Штаерман*, Контактная задача теории упругости, Гостехтеориздат, М—Л., 1949. [2] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [3] *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин*, Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Наукова думка, Киев, 1976. [4] *Ж. Я. Попов*, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев-Одесса, 1982. [5] *Г. Я. Попов*, Концентрации упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. [6] *В. М. Александров, В. А. Кучеров*, ПММ, т. 34, вып. 4, с.643—652 (1970). [7] *С. М. Мхитарян*, Изв. АН Арм.ССР. Механика, т. 35, № 6, с. 3—18 (1982). [8] *С. М. Мхитарян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, с. 65—72 (1983). [9] *С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 219—227 (1983). [10] *С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 48, вып. 1, с. 105—113 (1984). [11] *С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 48, вып. 5, с. 845—853 (1984). [12] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 27, вып. 5, с. 821—832 (1963).