ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

К. В. Гаспарян

Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/III 1992)

В данной работе получены усиленные законы больших чисел (У. З. Б. Ч.) для одномерных и многомерных опциональных мартингалов. Приведены также законы повторного логарифма для одномерных опциональных мартингалов, распространяющие соответствующие результаты Д. Лепингля. Многомерный вариант У. З. Б. Ч. применяется для установления строгой состоятельности МНК—оценок параметров для линейной регрессионной модели, рассмотренной в регулярном случае А. А. Новиковым и А. В. Мельниковым ([1–3]), а также А. Ле Бретоном и М. Мусейлой ([4]).

В отличие от работ ([2–6]), где аналогичные вопросы рассмотрены для регулярных (càdlàg) мартингалов, заданных на стандартном стохастическом базисе, здесь рассматриваются опционально-измеримые (làglàd) мартингалы (с траекториями, имеющими двусторонние пределы) на произвольном стохастическом базисе $(\Omega, \mathrm{F}, F=(\mathrm{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Необходимые понятия, используемые в работе, можно найти в ([7–9]).

Примем следующие обозначения:

$$F_+ = (\mathrm{F}_{t+})_{t\geq 0},$$

где $\mathrm{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathrm{F}_s$; P, O σ — алгебры предсказуемых и опциональных множеств, а также множества соответствующих d-мерных измеримых процессов и $d\times d$-матрично-значных процессов ($d\geq 1$); P_s — множество строго предсказуемых d-мерных процессов и $d\times d$-матрично-значных процессов ($(a_t)_{t\geq 0}\in \mathrm{P}_s$, если $(a_t)_{t\geq 0}\in \mathrm{P}$ и $(a_{t+})_{t\geq 0}\in O$); $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{T}_+$ — множества F-моментов остановки (м. о.), F-предсказуемых м. о. и F_+-м. о.; $\mathrm{A}_{\mathrm{loc}}$, V^+ и $\mathrm{A}^+_{\mathrm{loc}}$ — множества d-мерных процессов локально интегрируемой вариации, возрастающих и локально интегрируемых возрастающих процессов; $A(R^k, R^d)$ и $A^+(R^d)$—множество матрично-значных процессов $A_t: R^k \to R^d$ ограниченной вариации и множество положительно определенных матрично-значных процессов

$A \in A(R^k, R^d)$ таких, что $A_t - A_s$ является положительно определенной матрицей для любых $t > s$; $M_{loc}(R^d)$ и $M^2_{loc}(R^d)$ — множества опциональных локальных и локально квадратично интегрируемых d-мерных мартингалов; $S(R^d)$ — множество d-мерных опциональных семимартингалов.

Для d-мерных опциональных процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$ условимся обозначать $(X \to)$ множество, где существует $\lim_{t \to \infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega)$ по по норме $\|\cdot\|$ пространства R^d и является конечной случайной величиной (с. в.).

Для множеств A, $B \in F$ запись $A = B$ п. н. или $A \subset B$ п. н. будет означать соответственно $P(A \Delta B) = 0$ или $P(A \cap (\Omega \setminus B)) = 0$, где Δ — знак симметрической разности множеств.

Пусть $(\Omega, F, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ — некоторый стохастический базис, где $F = (F_t)_{t \geq 0}$ — произвольная фильтрация (неубывающий поток σ-алгебр: $F_s \subseteq F_t \subseteq F$, $t \geq s \geq 0$).

Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0} \in M_{loc}(R^1)$. Тогда имеет место единственное (с точностью до неотличимости) представление (см. [7]) $M = M^r + M^g$, где $M^r = M^c + M^d \in M_{loc}(R^1)$, $M^c \in M_{loc}(R^1)$ и M^d $(M^g) \in M_{loc}(R^1)$ — непрерывная и „чисто разрывная" cadlag (caglad) составляющие для M.

Определим процессы $(\Delta M_s = M_s - M_{s-}$, $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, $(s \geq 0)$

$$[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 + \sum_{s < t} (\Delta^+ M_s)^2 \in V^+,$$

$$D_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (1 + |\Delta M_s|)^{-1} (\Delta M_s)^2 +$$

$$+ \sum_{s < t} (1 + |\Delta^+ M_s|)^{-1} (\Delta^+ M_s)^2 \in A^+_{loc},$$

где $\langle M^c \rangle \in A^+_{loc}$ — квадратическая характеристика для $M^c \in M_{loc}(R^1)$.

Справедливы следующие результаты относительно множества сходимости опциональных локальных мартингалов (ср. [8]).

Теорема 1 (см. [10]). *Пусть* $M \in M_{loc}(R^1)$ $(\in M^2_{loc}(R^1))$. *Тогда*

a) $(\tilde{D}_\infty < \infty) \subseteq (M \to)$ $((\langle M \rangle_\infty < \infty) \subseteq (M \to))$ *п. н.*;

b) *если для всех* $T \in \tau$ *и* $U \in \tau_+$ *имеем* $E|\Delta M_T| I_{T<\infty} < \infty$ *и* $E|\Delta^+ M_U| I_{U<\infty} < \infty$ $(E|\Delta M_T|^2 I_{T<\infty} < \infty$ *и* $E|\Delta^+ M_U|^2 I_{U<\infty} < \infty)$, *то*

$$(\tilde{D}_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \to) \text{ п. н.}$$

$$((\langle M \rangle_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \to)) \text{ п. н.},$$

где $\tilde{D} \in P_s \cap A^+_{loc}$ — *компенсатор процесса* $D \in A^+_{loc}$, $\langle M \rangle = \langle M^r \rangle +$ $+ \langle M^g \rangle \in P_s \cap A^+_{loc}$ — *квадратическая характеристика для* $M \in$ $\in M^2_{loc}(R^1)$.

1. *Усиленные законы больших чисел*

а) *Одномерный случай.*

Пусть $X = (X_t)_{t\geq 0} \in S(R^1)$ с разложением $X = X_0 + A + M$, где $X_0 \in \mathbf{F}_0$, $A \in \mathbf{V}$, $M \in \mathcal{M}_{loc}(R^1)$ и $L = (L_t)_{t\geq 0} \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{P}_s$.

Рассмотрим следующий процесс:

$$Y_t = \int\limits_{[0,t]} (1 + L_s)^{-1} dX^r_s + \int\limits_{[0,t]} (1 + L_{s+})^{-1} dX^g_{s+}, \tag{1}$$

где

$$X = X^r + X^g, \quad X^r = X_0 + A^r + M^r, \quad X^g = A^g + M^g,$$

$$A^r = A^c + \sum_{s\leq \cdot} \Delta A_s, \quad A^g = \sum_{s<\cdot} \Delta^+ A_s$$

(относительно определений интегралов в (1) см. ([8])).

При доказательстве У. З. Б. Ч. используется следующее обобщение известной леммы Кронекера (ср. ([8])).

Лемма 1 (см. ([10])). *Для процессов* $X \in S(R^1)$ *и* $L \in \mathbf{V}^+ \cap \mathbf{P}_s$ *справедливо включение*

$$(L_\infty = \infty) \cap (Y_t \to) \subseteq (L_t^{-1} X_t \to 0) \text{ п. н. } \ (t \to \infty).$$

Доказательство. Из (1) легко видеть, что

$$(1 + L)\cdot Y^r_t + (1 + L_+)\cdot Y^g_t = X_t - X_0. \tag{2}$$

Применяя формулу интегрирования по частям (см. ([9])), получим

$$(1 + L_t) Y_t = (1 + L)\cdot Y^r_t + (1 + L_+)\cdot Y^g_t + Y_-\cdot L^r_t + Y\cdot L^g_t.$$

Тогда из (2) заключаем, что

$$(1 + L_t)^{-1} X_t = (1 + L_t)^{-1} (X_0 + Y_t) +$$

$$+ (1 + L_t)^{-1} (L_t Y_t - Y_-\cdot L^r_t - Y\cdot L^g_t).$$

Ввиду того, что на множестве $(L_\infty = \infty) \cap (Y \to)$ имеем $\sup\limits_{t>0} |Y_t| < \infty$, $(1 + L_t)^{-1} (X_0 + Y_t) \to 0$ п. н. при $t \to \infty$.

С другой стороны, имеем для $u < t$, $v < t$

$$(1 + L_t)^{-1} \left| L_t Y_t - \int\limits_{[0,t]} Y_{s-}\, dL^r_s - \int\limits_{[0,t]} Y_s dL^g_{s+} \right| \leq$$

$$\leq (1 + L_t)^{-1} \Bigg(\int\limits_{[0,u]} |Y_t - Y_{s-}|\, dL^r_s + \int\limits_{[u,t]} (|Y_\infty - Y_t| + |Y_\infty - Y_{s-}|)\, dL^r_s +$$

$$+ \int\limits_{[0,v]} |Y_t - Y_s|\, dL^g_{s+} + \int\limits_{[v,t]} (|Y_\infty - Y_t| + |Y_\infty - Y_s|)\, dL^g_{s+} \Bigg) \leq$$

$$< 2\sup_{s\geq 0}|Y_s|(1+L_t)^{-1}(L_\infty^r+L_\infty^g)+|Y_\infty-Y_t|+$$

$$+(1+L_t)^{-1}\int\limits_{]0,t]}|Y_\infty-Y_{s-}|\,dL_s^r+(1+L_t)^{-1}\int\limits_{[0,t[}|Y_\infty-Y_s|\,dL_{s+}^g. \qquad (3)$$

Отсюда на множестве $(L_\infty=\infty)\cap(Y\to)$ для достаточно больших t выбором соответствующих u и v правую часть в неравенстве (3) можно сделать сколь угодно малой.

Теорема 2 (см. ([10])). *Пусть* $L\in V^+\cap P_*$ *и* $L_\infty=\infty$ *п. н. Тогда*

$$L_t^{-1}X_t\to 0 \text{ п. н. при } t\to\infty \text{ если:}$$

a) *для* $X\in M^2_{loc}(R^1)$ *имеем* $\langle Y\rangle_\infty<\infty$ *п. н.;*

b) *для* $X\in M_{loc}(R^1)$ *имеем* $[Y,Y]_\infty<\infty$ *п. н. и* $E|\Delta X_T|I_{T<\infty}<\infty$, $E|\Delta^+X_U|I_{U<\infty}<\infty$ *для всех* $T\in\tau$ *и* $U\in\tau_+$;

c) *для* $X\in S(R^1)$ *имеем*

$$\operatorname{Var}B_\infty^r+\operatorname{Var}B_\infty^g+\bar{D}_\infty<\infty \text{ п. н.}, \qquad (4)$$

где $Y=Y_0+B+N\in S(R^1)$ $(B=B^r+B^g\in V,\ N\in M_{loc}(R^1))$ *процесс из* (1), $\operatorname{Var}B_\infty$ — *вариация процесса* B *на* $[0,\infty[$.

Доказательство. a) Утверждение непосредственно следует из теоремы 1a и леммы 1; b) так как процесс $Y\in M_{loc}(R^1)$ и для всех $T\in\tau$ и $U\in\tau_+$ имеем

$$E|\Delta Y_T|I_{T<\infty}\leq E(1+L_T)^{-1}|\Delta X_T|I_{T<\infty}\leq E|\Delta X_T|I_{T<\infty}<\infty,$$

$$E|\Delta^+Y_U|I_{U<\infty}\leq E(1+L_{U+})^{-1}|\Delta^+X_U|I_{U<\infty}\leq E|\Delta^+X_U|I_{U<\infty}<\infty,$$

то утверждение следует из теоремы 1b и леммы 1; c) пусть $X\in S(R^1)$ с разложением $X=X_0+(A^r+M^r)+(A^g+M^g)$, где $A^r, A^g\in V$, $M^r=M^c+M^d$, $M^g\in M_{loc}(R^1)$. Запишем процесс Y из (1) в виде $Y=Y_0+B+N$, где $B=B^r+B^g\in V$, $N\in M_{loc}(R^1)$ и $B^r=(1+L)^{-1}\cdot A^r$, $B^g=(1+L_+)^{-1}\cdot A^g$, $N=(1+L)^{-1}\cdot M^r+(1+L_+)^{-1}\cdot M^g$. Из условия (4) следует, что $P(B^r\to)=1$, $P(B^g\to)=1$, т. е. $P(B\to)=1$. С другой стороны, так как $\bar{D}_\infty<\infty$, то из теоремы 1 a) следует, что $P(N\to)=1$. Таким образом, имеем $P(Y\to)=1$ и утверждение c) следует из леммы 1.

Из теоремы 2 выводится следующий вариант леммы Бореля — Кантелли (ср. ([5])).

Лемма 2 (см. ([10])). *Пусть* $A=A^r+A^g\in A^+_{loc}$ *и выполняются условия*

$$\tilde{A}^r_\infty=\infty,\ \tilde{A}^g_\infty=\infty \text{ п. н. и } E\sup_{t>0}\Delta A_t<\infty,\ E\sup_{t\geq 0}\Delta^+A_t<\infty. \qquad (5)$$

Тогда

$$\tilde{A}_t^{-1} A_t \to 1 \text{ п. н. при } t \to \infty.$$

Доказательство. Ввиду того, что $X = A - \tilde{A} \in M_{loc}(R^1)$, достаточно доказать, что $\tilde{A}_t^{-1} X_t \to 0$ *п. н. при* $t \to \infty$. Согласно теореме 2 для этого нужно показать, что :

a) $E|\Delta X_T| I_{T<\infty} < \infty$, $E|\Delta^+ X_U| I_{U<\infty} < \infty$ для любых $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$;

b) $(1+\tilde{A})^{-2} \cdot [X^r, X^r]_\infty + (1+\tilde{A}_+)^{-2} \cdot [X^g, X^g]_\infty < \infty$ *п. н.*

Условие a) следует из неравенств:

$$|\Delta X| \leqslant \Delta A + \Delta \tilde{A}, \quad |\Delta^+ X| \leqslant \Delta^+ A + \Delta^+ \tilde{A} \quad \text{и}$$

$$E\Delta \tilde{A}_T I_{T<\infty} \leqslant E \sup_{t>0} \Delta A_t < \infty, \quad E\Delta^+ \tilde{A}_U I_{U<\infty} \leqslant E \sup_{t>0} \Delta^+ A_t < \infty$$

для любых $T \in \tau_p$ и $U \in \tau$, поскольку множества $(\Delta \tilde{A} > 0) \in \mathrm{P}$ и $(\Delta^+ \tilde{A} > 0) \in O$ исчерпываются последовательностями соответственно F-предсказуемых м. о. и F-м. о. (см. [7]). Условие b) также легко получить, учитывая (5) и очевидные неравенства: $(1+\tilde{A}) \cdot A^r_\infty \leqslant 1$ и $(1+\tilde{A}_+) \cdot A^g_\infty \leqslant 1$ (ср. [6]).

в) *Многомерный случай (У. З. Б. Ч)*

Для $M = (M^1, \dots, M^d)^* \in M^2_{loc}(R^d)$ положим (см. [7])

$$Q^r = (d \langle M^{ir}, M^{jr} \rangle / d \langle M^r \rangle)_{i,j \leqslant d},$$

$$Q^g = (d \langle M^{ig}, M^{jg} \rangle / d \langle M^g \rangle)_{i,j \leqslant d}, \qquad Q^r \in \mathrm{P},\ Q^g \in P_s,$$

где $M^i = M^{ir} + M^{ig}$, $\langle M^r \rangle = tr(\langle M^{ir}, M^{jr} \rangle)_{i,j \leqslant d}$, $\langle M^g \rangle = tr(\langle M^{ig}, M^{jg} \rangle)_{i,j \leqslant d}$, trA — след матрицы A.

Пусть $L = (l_t^{i,j})_{i,j \leqslant d} \in A^+(R^d) \cap \mathrm{P}_s$, $L_+ = (l_{t+}^{i,j})_{i,j \leqslant d} \in A^+(R^d)$, так что

$$\int_{[0,t]} tr L_s^{-1} Q_s^r (L_s^{-1})^* d \langle M^r \rangle_s < \infty,$$

$$\int_{[0,t[} tr L_{s+}^{-1} Q_{s+}^g (L_{s+}^{-1})^* d \langle M^g \rangle_{s+} < \infty,$$

где $(L^{-1})^*$ — транспонированная матрица.

Тогда определен процесс

$$Y_t = \int\limits_{[0,t]} L_s^{-1} dM_s^r + \int\limits_{[0,t[} L_{s+}^{-1} dM_{s+}^g \in \mathrm{M}^2_{\mathrm{loc}}(R^d) \quad (\text{ср. } (^7)).$$

Имеет место матричный аналог леммы Кронекера (ср. ([3])).

Лемма 3. *Пусть* $M \in \mathrm{M}^2_{\mathrm{loc}}(R^d)$, $L \in A^+(R^d) \cap \mathrm{P}_s$, $L_+ \in A^+(R^d)$. *Тогда*

$$(\lambda_{\min}(L_t) \to \infty) \cap (\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \lambda_{\min}^{-1}(L_t)\lambda_{\max}(L_t^r) < \infty) \cap (\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \lambda_{\min}^{-1}(L_t)\lambda_{\max}(L_t^g) < \infty) \cap$$

$$\cap (Y_t \to) \subseteq (\| L_t^{-1} M_t \| \to 0) \text{ п. н.},$$

где $\lambda_{\min}(L_t)$ *и* $\lambda_{\max}(L_t)$ — *минимальное и максимальное собственные значения матрицы* L_t.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $M_t = \int\limits_{[0,t]} L_s dY_s^r + \int\limits_{[0,t[} L_{s+} dY_{s+}^g$ с точностью до неотличимости.

Далее, применяя формулу интегрирования по частям (см. ([9])), получим

$$L_t Y_t = \int\limits_{[0,t]} L_s dY_s^r + \int\limits_{[0,t[} L_{s+} dY_{s+}^g + \int\limits_{[0,t]} dL_s^r Y_{s-} + \int\limits_{[0,t[} dL_{s+}^g Y_s.$$

Откуда имеем

$$L_t^{-1} M_t = L_t^{-1} \int\limits_{[0,t]} dL_s^r (Y_t - Y_{s-}) + L_t^{-1} \int\limits_{[0,t[} dL_{s+}^g (Y_t - Y_s).$$

Учитывая теперь условия леммы, получим для $u < t$, $v < t$ (ср. ([3]))

$$\| L_t^{-1} M_t \| \leqslant \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \Big\| \int\limits_{[0,t]} dL_s^r (Y_t - Y_{s-}) \Big\| +$$

$$+ \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \Big\| \int\limits_{[0,t[} dL_{s+}^g (Y_t - Y_s) \Big\| \leqslant 2d\, \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \sup_{s\geq 0} \| Y_s \| (\lambda_{\max}(L_u^r) +$$

$$+ \lambda_{\max}(L_v^g)) + d\lambda_{\min}^{-1}(L_t) \| Y_\infty - Y_t \| (\lambda_{\max}(L_t^r) + \lambda_{\max}(L_t^g)) +$$

$$+ \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \left(\Big\| \int\limits_{]u,t]} dL_s^r (Y_\infty - Y_{s-}) \Big\| + \Big\| \int\limits_{]v,t[} dL_{s+}^g (Y_\infty - Y_s) \Big\| \right). \qquad (6)$$

Для достаточно больших t выбором соответствующих значений u и v правую часть в (6) можно сделать произвольно малой.

Отсюда получим следующий вид У. З. Б. Ч. для d-мерных мартингалов.

Теорема 3 (ср. ([3])). *Пусть* $M \in \mathrm{M}^2_{loc}(R^d)$, $L \in A^+(R^d) \cap \mathrm{P}_s$, $L_+ \in A^+(R^d)$ *и имеют место условия: (п. н.)*

1) $\lambda_{\min}(L_t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$;

2) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \lambda^{-1}_{\min}(L_t)\, \lambda_{\max}(L^r_t) < \infty$, $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \lambda^{-1}_{\min}(L_t)\, \lambda_{\max}(L^g_t) < \infty$;

3) $trL^{-1}Q^r(L^{-1})^* \cdot \langle M^r \rangle_- < \infty$, $trL^{-1}_+Q^g_+(L^{-1}_+)^* \cdot \langle M^g \rangle_- < \infty$.

Тогда $\|L_t^{-1}M_t\| \to 0$ *п. н. при* $t \to \infty$.

Доказательство. Из условий 3) следует, что $\langle Y \rangle_- < \infty$ п.н.. Тогда согласно теореме 1 имеем $\|Y_t - Y_-\| \to 0$ п. н. и по лемме 3 получим $\|L_t^{-1} M_t\| \to 0$ п. н.

Приведем простое применение У. З. Б. Ч. для следующей регрессионной модели (ср. ([1-4])):

Пусть наблюдается процесс

$$X_t = A_t\theta + M_t, \quad t \geqslant 0,$$

где $M = M^r + M^g \in \mathrm{M}^2_{loc}(R^d)$, $A = A^r + A^g \in A(R^k, R^d) \cap \mathrm{P}_s$, $\theta \in R^k$ — неизвестный параметр. Пусть существует процесс $V = V^r + V^g \in \mathrm{P}_s \cap A^+(R^1)$ такой, что $dA^r_t/dV^r_t = \alpha_t$, $dA^g_{t+}/dV^g_{t+} = \beta_t$, $\alpha \in A(R^k, R^d) \cap \mathrm{P}$, $\beta \in A(R^k, R^d) \cap O$, определены процессы:

$$N_t = \int\limits_{[0,t]} \alpha^*_s dM^r_s + \int\limits_{[0,t]} \beta^*_s dM^g_{s+} \in \mathrm{M}^2_{loc}(R^d),$$

$$L_t = \int\limits_{[0,t]} \alpha^*_s \alpha_s dV^r_s + \int\limits_{[0,t]} \beta^*_s \beta_s dV^g_{s+} \in A^+(R^k) \cap \mathrm{P}_s, \quad L_{t+} \in A^+(R^k),$$

$$Q^r = (d\langle N^{ir}, N^{jr}\rangle / dV^r)_{i,j\leqslant d}, \quad Q^g = (d\langle N^{ig}, N^{jg}\rangle / dV^g)_{i,j\leqslant d},$$

$$d\langle N^r\rangle / dV^r \leqslant \xi^1 < \infty \text{ п. н.}, \quad d\langle N^g\rangle_+ / dV^g_+ \leqslant \xi^2 < \infty \text{ п. н.}$$

Теорема 4 (ср. ([3])). *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3 *и следующее условие*:

3′) $trL^{-1}Q^r(L^{-1})^* \cdot V^r_- < \infty$, $trL^{-1}_+Q^g_+(L^{-1}_+)^* \cdot V^g_- < \infty$ *п. н.*

Тогда МНК-оценка $\hat\theta_T = L_T^{-1}\left(\int\limits_{[0,T]} \alpha^*_s dX^r_s + \int\limits_{[0,T]} \beta^*_s dX^g_{s+}\right)$ *строго состоятельна* $(T > 0)$.

Доказательство. Легко видеть, что $\tilde{\theta}_T = \theta + L_T^{-1} N_T$. Тогда из теоремы 3 имеем $\|\tilde{\theta}_T - \theta\| \to 0$ п. н. при $T \to \infty$.

2. *Законы повторного логарифма*

Теорема 5 (ср. [5]). *Пусть* $M \in \mathcal{M}'_{loc}(R^1)$ *и* $E \sup\limits_{t>0} |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup\limits_{t>0} |\Delta^+ M_t| < \infty$. *Тогда при условии* $\langle M \rangle_\infty = \infty$ *п. н. имеем*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, M_t (2 \langle M \rangle_t \ln \ln \langle M \rangle_t)^{-1/2} \leq 1 \text{ п. н.}$$

Теорема 6 (ср. [5]). *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{loc}(R^1)$. *Если* $E \sup\limits_{t>0} |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup\limits_{t>0} |\Delta^+ M_t| < \infty$, *то при условии* $[M, M]_\infty = \infty$ *п. н. имеем*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, M_t (2 [M, M]_t \ln \ln [M, M]_t)^{-1/2} \leq 1 \text{ п. н.}$$

Доказательства этих теорем с соответствующими модификациями проводятся по той же схеме, что и в работе [5].

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Օպցիոնալ մարտինգալների ասիմպտոտիկ վարքի մասին

Հոդվածում ստացված են մեծ թվերի ուժեղացված օրենքները միաչափ և բազմաչափ օպցիոնալ մարտինգալների համար։ Բերված են նաև կրկրնակի լոգարիթմի օրենքները միաչափ օպցիոնալ մարտինգալների համար։ Որպես օրինակ ապացուցված է անհայտ պարամետրի գնահատականի խիստ ունակայնությունը գծային բազմաչափ ռեգրեսիոն մոդելի համար։

Բոլոր պրոցեսները դիտարկվում են կամայական ստոխաստիկ բազիսի վրա և ենթադրվում են ոչ ռեգուլյար (երկկողմանի սահմաններ ունեցող հետագծերով)։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. A. Novikov*, Statistics and Control of Stochastic Processes, Springer, Berlin etc., 1985. [2] *А. В. Мельников*, ДАН СССР, т. 286, № 3 (1986). [3] *A. V. Melnikov, A. A. Novikov*, Probab. Theory and Math. Stat., v. 2—Utrecht VSP BV/Vilnius Mokslas, 1990. [4] *A. Le Breton, M. Musiela*, Probab. Theory and Related Fields, v. 81, № 2 (1989). [5] *D. Lepingle*, Lecture Notes Math., v. 649, Springer, Berlin etc., 1977. [6] *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев*, Теория мартингалов, Наука, М., 1986. [7] *Л. И. Гальчук*, Мат. сб., т. 112 (154), № 4 (8) (1980). [8] *Л. И. Гальчук*, Теория вероятн. и ее применен., т. 29, № 1 (1984). [9] *К. В. Гаспарян*, Канд. дис., Ереван, 1988. [10] *K. V. Gasparian*, Fifth Intern. Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. St., Abstr., Vilnius, 1989.