ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 93 1992 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

А. А. Галстян

Решение интегральных уравнений с псевдодифференциальными ядрами

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 27/XI 1991)

При построении параметрикса для гиперболического оператора возникает необходимость исследовании следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} D_t Q(t, s) + R(t, s) Q(t, s) + R_0(t, s) \in C_{t,s}(S^{-\infty}), & (1) \\ Q(s, s) = 0, & (2) \end{cases}$$

где $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — dxd-матричные псевдодифференциальные операторы, зависящие от параметров $t, s \in [0, T]$. При предположениях на символ оператора $R(t, s)$, а именно

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} g(t, \xi), \tag{3}$$

$$\int_0^T g(\tau, \xi)\, d\tau \leqslant K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leqslant C_0 \langle \xi \rangle^m, \tag{4}$$

в работе [1] доказывается существование и единственность решения задачи (1), (2). Мы переносим этот результат на интегральные уравнения типа Вольтерра

$$Q(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t R(t, \theta) Q(\theta, s)\, d\theta. \tag{5}$$

Интегральные уравнения с псевдодифференциальными ядрами рассматривались во многих работах (см., например [2]). В работах [3, 4] рассматривались интегральные уравнения типа Вольтерра параболического типа.

Наряду с уравнением (5) рассматриваются также интегральные уравнения

$$V(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t V(\theta, s) R(t, \theta)\, d\theta. \tag{6}$$

$$U(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t U(t, \theta) R(\theta, s) d\theta, \tag{7}$$

$$G(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t R(\theta, s) G(t, \theta) d\theta, \tag{8}$$

где $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — dxd-матричные псевдодифференциальные операторы (ПДО) с символами $r(t, s, x, \xi)$, $r_0(t, s, x, \xi)$ соответственно.

Определение. *Отображение $Q(t, s) \in C([0, T]^2, \bigcup_m \Psi^m_{\rho, \delta})$ будем называть решением интегрального уравнения* (5), *если*

$$Q(t, s) - R_0(t, s) - \int_s^t R(t, \theta) Q(\theta, s) d\theta \in C_{t, s}(S^{-\infty}). \tag{9}$$

Решение уравнений (6), (7), (8) определяется аналогично.

Теорема 1. *Предположим, что существуют постоянные K, M, C_0 такие, что с некоторыми p, m для любых α, β, с положительными постоянными $C_{\alpha, \beta}$, при всех $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$ выполнены неравенства*

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x r(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} g(s, x, \xi), \tag{10}$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x r_0(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{p-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} g(s, x, \xi). \tag{11}$$

$$\int_0^T g(\tau, x, \xi) d\tau \leqslant K \ln \langle \xi \rangle, \qquad g(s, x, \xi) \leqslant C_0 \langle \xi \rangle^m \tag{12}$$

Тогда существуют решения $Q(t, s)$, $V(t, s)$, $U(t, s)$, $G(t, s)$ интегральных уравнений (5), (6), (7), (8), *с символами $q(t, s, x, \xi)$, $v(t, s, x, \xi)$, $u(t, s, x, \xi)$, $g(t, s, x, \xi)$ соответственно.*

Причем эти символы — $d \times d$-матрицы и при всех $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x q(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha+\beta|+1}, \tag{13}$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x v(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha+\beta|+1}, \tag{14}$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x u(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha+\beta|+1}, \tag{15}$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x g(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha+\beta|+1}, \tag{16}$$

и, следовательно, принадлежат классу $C_t([s, T], \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+m+\varepsilon}) \cap \cap C^1_t([s, T], \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+2m+\varepsilon})$.

Доказательство. Сначала докажем теорему для интегрального уравнения (5). Выберем собственные представители классов экнивалентности $R(t,\ s)$, $R_0(t,\ s)$ и построим собственный оператор $Q(t,\ s)$. Решение будем искать в виде

$$q \sim q_0 + q_1 + q_2 + \ldots \ (\mathrm{mod}\, C_t^1 (S^{-\infty})), \tag{17}$$

где $q_k(t,\ s,\ x,\ \xi)$ — решение следующего интегрального уравнения

$$q_k(t,\ s,\ x,\ \xi) = r_k(t,\ s,\ x,\ \xi) + \int_s^t r(t,\ \theta,\ x,\ \xi)\, q_k(\theta,\ s,\ x,\ \xi)\, d\theta, \tag{18}$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

где

$$r_k(t,\ s,\ x,\ \xi) = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-l} \frac{1}{\alpha!} \int_s^t \partial_\xi^\alpha r(t,\ \theta,\ x,\ \xi)\, D_x^\alpha q_l(\theta,\ s,\ x,\ \xi)\, d\theta, \tag{19}$$

а $q_k(t,\ s,\ x,\ \xi)$ находится по следующей формуле:

$$q_k(t,\ s,\ x,\ \xi) = r_k(t,\ s,\ x,\ \xi) + \int_s^t w(t,\ \theta,\ x,\ \xi)\, r_k(\theta,\ s,\ x,\ \xi)\, d\theta, \tag{20}$$

$$w = \sum_{v=1}^{\infty} w_v,\quad w_1(t,\ s) = r(t,\ s),\quad w_{v+1}(t,\ s) = \int_s^t w_1(t,\ \theta)\, w_v(\theta,\ s)\, d\theta. \tag{21}$$

Лемма 1. *Для любых* α, β, v $(v = 1,\ 2,\ \ldots)$ *имеют место неравенства*

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta w_v(t,\ s,\ x,\ \xi) \| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} \times$$
$$\times\, g(s,\ x,\ \xi) \frac{v^{|\alpha+\beta|}}{(v-1)!} \left\{ \int_s^t g(\tau)\, d\tau \right\}^{v-1}. \tag{22}$$

Существует $w(t,\ s)$ *матричный ПДО с символом*

$$w(t,\ s,\ x,\ \xi) = w_1(t,\ s,\ x,\ \xi) + w_2(t,\ s,\ x,\ \xi) + \ldots,$$

удовлетворяющим условиям

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta w(t,\ s,\ x,\ \xi) \| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|} g(s,\ x,\ \xi) \times$$
$$\times \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^{|\alpha+\beta|}}{(v-1)!} \left\{ \int_s^t g(\tau)\, d\tau \right\}^{v-1}. \tag{23}$$

Лемма 2. *Для любых* α, β, k *имеют место неравенства*

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta r_k(t,\ s,\ x,\ \xi) \| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-k} g(s,\ x,\ \xi) (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$
$$\times \sum_{v=1}^{k} \frac{v^{|\alpha+\beta|+2k-1}}{v!} \left\{ \int_s^t g(\tau)\, d\tau \right\}^{v}, \tag{24}$$

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi) \| < C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-k} g(s, x, \xi) (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)^{|\alpha+\beta|+2k}}{\nu!} \left\{ \int_s^t g(\tau)\, d\tau \right\}^\nu . \qquad (25)$$

Из неравенств (25) и (12) получаем

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi) \| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{K-k-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2(|\alpha+\beta|+2k)+1} g(s, x, \xi) \qquad (26)$$

равномерно по $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Следовательно,

$$q_k \in C_t([s, T); \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K-k+\varepsilon}).$$

Таким образом, существование решения уравнения (5) доказано. Доказательство теоремы для уравнений (6), (7), (8) проводится аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, тогда решения интегрального уравнения (5) и интегрального уравнения (6) единственны по модулю* $C_t^1([s, T], \Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Докажем единственность решения уравнения (5). Пусть $U(t, s)$ решение следующего интегрального уравнения

$$u(t, s) = f(t, s) + \int_s^t R(t, \theta)\, u(\theta, s)\, d\theta, \qquad (27)$$

где $f(t, s) \in C([0, T]^2, \mathcal{S}')$. Определим оператор G по формуле

$$Gf(t, s) = \int_s^t V^*(t, t') f(t', s)\, dt', \qquad (28)$$

где $V^*(t, t')$ решение следующего интегрального уравнения:

$$V^*(t, t') = I + P(t, t') + \int_{t'}^t V^*(t, \theta) R(\theta, t')\, d\theta, \qquad (29)$$

здесь I — тождественный оператор, $P(t, t')$ сглаживающий оператор, гладко зависящий от t, t'. Решение уравнения (29) существует согласно теореме 1. Из (27) получаем

$$Gf(t, s) = \int_s^t V^*(t, t') u(t', s)\, dt' - \int_s^t V^*(t, t') \int_s^{t'} R(t', \theta)\, u(\theta, s)\, d\theta\, dt'.$$

Меняя порядок интегрирования во втором интеграле и учитывая (29), получаем

$$u(t, s) = \frac{\partial}{\partial t}(Gf(t, s)) - P(t, t)u(t, s) - \int_s^t \frac{\partial P(t, t')}{\partial t} u(t', s)\,dt'. \quad (30)$$

Теперь легко доказать единственность решения уравнения (5). Пусть $Q_1(t, s)$ и $Q_2(t, s)$ два решения этого уравнения, тогда подставляя в (30)

$$u(t, s) = (Q_1(t, s) - Q_2(t, s))\,u_0 \in C_t^1([s, T]; \mathcal{E}),$$

где $u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$, получаем $Q_1(t, s) - Q_2(t, s)$, которое является элементом пространства $C_t^1([s, T], \Psi^{-\infty})$.

Доказательство единственности решения уравнения (6) проводится аналогично. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю К. А. Ягджяну за постановку задачи.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики

Ա. Ա. ԴԱԼՍՏՅԱՆ

Փսևդոդիֆերենցիալ կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների լուծումը

Աշխատանքում դիտարկվում են Վոլտեռայի տիպի հետևյալ ինտեգրալ հավասարումները՝

$$Q(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t R(t, \theta)\,Q(\theta, s)\,d\theta,$$

$$V(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t V(\theta, s)\,R(t, \theta)\,d\theta,$$

$$U(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t U(t, \theta)\,R(\theta, s)\,d\theta,$$

$$G(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t R(\theta, s)\,G(t, \theta)\,d\theta,$$

որտեղ $R_0(t, s)$, $R(t, s)$, $Q(t, s)$, $V(t, s)$, $U(t, s)$, $G(t, s)$ — *փսևդոդիֆերենցիալ օպերատորներ են։ Այդպիսի հավասարումների համար կառուցվում է հակադարձ օպերատոր, որի կորիզը ևս հանդիսանում է փսևդոդիֆերենցիալ օպերատոր, ապացուցվում է լուծման գոյությունը և միակությունը կորիզների սիմվոլների վրա դրված սահմանափակումների դեպքում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Ягджян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 4 (1986). [2] *K. Taniguchi*, Math. Japonica, v. 27, № 4 (1982). [3] *H. Tanabe*, Hokkaido Math. J., v. 12 (1983). [4] *Y. Fujita*, Osaka J. Math, v. 27 (1990). [5] *Ф. Трев*, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. I, Мир, М., 1984.