УДК 517.53

В. Г. Петросян

Соотношения типа тождества Картана

(Представлено чл.-корр. АН Армении Н. У. Аракелянном 30/X 1991)

Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \ln |\varpi(re^{i\varphi}) - a|^{-1} d\varphi, \text{ которая показывает, насколько}$$

близки значения функции $\varpi(z)$ к постоянной a , на дугах

$$\Delta(r, a) = \Delta(r, a, \varpi) = \{z: |z| = r, |\varpi(z) - a| \leq 1\} \quad (1)^*$$

В работе (2) вводятся новые характеристики близости, которые учитывают поведение производных высшего порядка функции $\varpi(z)$ на тех дугах окружности $|z| = r$, на которых ϖ близка к a . Мы имеем в виду следующие величины ($z = re^{i\varphi}$):

$$P_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \ln^{(k)} |\varpi(z) - a|^{-\frac{1}{2}} d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оказывается, что величины $P_k(r, a)$ обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций приближения $m(r, a)$, т. е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и соответственно аналог соотношения дефектов, характеризующих уже новые «исключительные» значения.

Ясно, что оценки величин $P_k(r, a)$ являются одновременно оценками k -евых производных функции $\ln |\varpi(z) - a|^{-1}$, являющейся мерой близости ϖ к a .

Укажем также другие точки зрения, с которых изучение величин $P_k(r, a)$ представляет интерес.

На актуальность изучения таких объектов указывает следующее простое предложение, связывающее $P_1(r, a)$ с классическими величинами: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция имеет по крайней мере два

* Мы полагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений.

дефектных значения в смысле В. П. Петренко, т. е. существуют значения a_1 и a_2 , для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} (L(r, a)/T(r)) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\max_{|z|=r} \ln^+ |\psi(z) - a|^{-1}/T(r)),$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$m(r, a) \leq \max_{|z|=r} \ln^+ |\psi(z) - a|^{-1} \leq P_1(r, a) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Таким образом, оценки сверху $P_1(r, a)$ одновременно являются оценками дефектов $\delta(a)$ и $\beta(a)$.

Получение окончательных результатов в теории мероморфных функций зачастую упирается в оценки логарифмических производных (1, 3-5).

Поскольку величины $P_1(r, a)$ определяются посредством логарифмической производной и для них устанавливаются соотношения дефектов, то эти величины становятся объектами самостоятельного изучения.

В работе (2) получены оценки сверху величин

$$Q_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{\psi^{(k)}(z)}{\psi(z) - a} \right|^k d\varphi.$$

Ясно, что из оценок величин $P_k(r, a)$ и $Q_k(r, a)$ можно извлечь информацию о поведении $\psi^{(k)}(z)$ на множествах $\Delta(r, a)$.

В настоящей заметке продолжено изучение качественного сходства свойств $P_k(r, a)$, $Q_k(r, a)$ и неванлинновской функции $m(r, a)$. С этой точки зрения рассматривается функция $L(r, a)$, фигурирующая в определении дефекта В. П. Петренко. Именно, для этих величин получены аналоги известного тождества Картана, которое в сущности эквивалентно соотношению (6)

$$\int_0^{2\pi} m(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $\psi(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ . Тогда на некоторой неограниченной последовательности значения r выполняется

$$\int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Следствие. Если существуют значения a_1 и a_2 такие, что $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, то соотношение (3) теоремы 1 можно заменить следующим:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Теорема 2. При условиях теоремы 1 справедливо

$$\int_0^{2\pi} Q_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o\{T(r)\}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

При $k=1$ эти результаты были установлены в работе (7).

Доказательство теоремы 1 опирается на «свойство близости a -точек» мероморфных функций, которое мы приводим в модификации, непосредственно следующей из предложения 1 работы (8) (с. 413—414).

Теорема А. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $\varphi(r) \uparrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ ($\varphi^{13}(r) < A(r)$). Тогда в круге $|z| \leq r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $E_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:

$$I. \quad |\Phi(r) - A(r)| \leq Q(r), \quad (6)$$

где $Q(r) \leq KA(r)/\varphi(r) + K\varphi^{17}(r)L(r)$, $K = \text{const} < \infty$.

II. В каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистка, замыкание множества $w(E_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом k_i исключенных из сферы односвязных областей Δ_j^i , $j = 1, 2, \dots, k_i$.

$$III. \quad \rho(\Delta_j^i) \leq 1/\varphi(r), \quad j = 1, 2, \dots, k_i, \quad i = 1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (7)$$

где $\rho(\Delta_j^i)$ — диаметр области Δ_j^i в сферической метрике.

$$IV. \quad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i \leq 4A(r) + Q(r). \quad (8)$$

$$V. \quad d(E_i(r)) \leq K\varphi^8(r)z/A^{\frac{1}{3}}(r), \quad i = 1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (9)$$

где $d(E_i(r))$ — диаметр области $E_i(r)$.

Теорема А представляет собой «свойство близости a -точек» мероморфных функций $w(z)$, устанавливающее, что для «хороших» a и b a -точки и b -точки функции $w(z)$ близко располагаются друг от друга (поскольку они лежат в малых областях $E_i(x)$). Теорема А включает в себя основной вывод теории распределения значений, согласно которому количества таких a -точек и b -точек близки.

Обозначим через $n(r, a, b)$ количество тех a -точек $z_a(a) \in E_b(r) \subset \sum_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$, для каждой из которых находится b -точка $z_b(b)$

из $E_b(r)$, и пусть $\Delta(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}) d\theta$, $\rho > 0$.

Лемма 1. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда справедливы следующие неравенства ($r > r_0$):

$$2\pi\Phi(r) - K\{A(r)/\varphi(r) + \varphi^{10}(r)L(r)\} \leq \Delta(r, \rho) \leq 2\pi\Phi(r), \quad (10)$$

где $K = \text{const} < \infty$.

Доказательство. Обозначим через $\{\gamma_j\}$ совокупность тех кривых, которые принадлежат области $w(E_j(r))$ и лежат на дугах $\{l_j\}$ окружности $|\omega| = 1$ таких, что если $e^{i\theta} \in l_j$, то прообраз точки $\rho e^{i\theta}$ принадлежит области $E_j(r)$. Тогда величина $\Delta(r, \rho)$ показывает суммарную длину всех линий, лежащих на поверхности $F(r) = \{w(z): z \in U_{j=1}^{\Phi(r)} E_j(r)\}$, проекции которых лежат над совокупностью дуг $\{l_j\}$, $j = 1, 2, \dots, \Phi(r)$.

Определим величину $n_j(r, e^{i\theta}, \rho, e^{i\theta_0})$ равной нулю, если хотя бы одна из $e^{i\theta_0}$ -, $\rho e^{i\theta_0}$ -точек не принадлежит множеству $E_j(r)$, и равной единице, если $e^{i\theta_0}$ -, $\rho e^{i\theta_0}$ -точки принадлежат множеству $E_j(r)$. Поскольку $w(z)$ однолистка в каждой области $E_j(r)$, то

$$n(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta_0}) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} n_j(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta_0}), \quad (11)$$

Следовательно

$$\Delta(r, \rho) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} \int_0^{2\pi} n_j(r e^{i\theta}, \rho e^{i\theta_0}) d\theta \leq 2\pi\Phi(r),$$

т. е. получаем правую часть неравенства (10).

Обозначим $\Delta'_{l, \rho}$ ($l = 1, 2, \dots, k_l$)-проекции на плоскость тех областей Δ'_l , которые пересекаются с окружностями $\{w: |w| = 1\}$ и $\{w: |w| = \rho\}$; $k_{l, \rho}$ — их количество. Тогда, используя пункты II, III теоремы А и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int_0^{2\pi} n_l(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta_0}) d\theta \geq 2\pi - \frac{K}{\varphi(r)} k_{l, \rho} \quad (r > r_0).$$

Отсюда, воспользовавшись оценками (8), (11) и учитывая неравенство $k_j \geq k_{j, \rho}$, получим

$$\Delta(r, \rho) \geq 2\pi\Phi(r) - K\{A(r)/\varphi(r) + \varphi^{10}(r)L(r)\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим при фиксированном α , $0 < \alpha < 1$,

$$E_\alpha^n = E_\alpha(R_n) = \{r: \alpha^2 R_n \leq r \leq \alpha R_n\}. \quad R_n > 0.$$

Лемма 2. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a - b| > 2$, $\alpha < \beta < 1$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{E_n^r} P_n(r, a) dr \leq K \{ |m(R'_n, a) + m(R'_n, b)| + [n(R'_n, a) + n(R'_n, b) - 2n(R'_n, a, b)] + [A(R'_n)]^{-\frac{1}{s_k}} n(R'_n, a, b) + o[T(cR_n)] \} R_n, \quad (12)$$

где $R'_n = \beta R_n$, $c = \text{const} > 1$.

О доказательстве леммы 2. Устанавливается существование таких чисел $b \in \mathbb{C}$, $|a - b| > 2$, для которых $\int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - b)|^k d\varphi$

„малы“. Тогда оценки $P_n(r, a)$ будут близки к оценкам величин

$$\int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - a) - \ln^{(k)}(w(z) - b)|^k d\varphi. \quad \text{После представления под-}$$

ынтегрального выражения формулой Р. Неванлинны применяется „свойство близости a -точек“.

Лемма 3 ((¹), с. 205). Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство ($K = \text{const} < \infty$)

$$\iint_{D(R)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)} \right| d\omega \leq KRT(cR), \quad R < R_0, \quad (13)$$

где $D(R) = \{z: |z| \leq R\}$, $d\omega$ — элемент площади, $c = \text{const} > 1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a = e^{i\theta}$, $b = \rho e^{i\theta}$, $|a - b| > 2$. Интегрируя по θ неравенство (12) леммы 2 и используя лемму 1 и соотношение (2), получим

$$\int_{E_n^r} \int_0^{2\pi} P_n(r, e^{i\theta}) d\theta \cdot r \leq KR_n \int_0^{2\pi} [n(R'_n, a) + n(R'_n, b) - 2n(R'_n, a, b)] d\theta + KR_n [\Phi(R'_n) [A(R'_n)]^{-\frac{1}{s_2}} = o[T(cR_\rho)] \}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что величина $\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\theta}) \rho d\theta$ показывает сред-

нее число накрытия над кривой, являющейся стереографическим образом окружности $|w| = \rho$. Следовательно, согласно второй теореме о покрытии ((¹), гл. XIII, с. 338) имеем

$$\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi A(r) + KL(r).$$

Следовательно, применяя лемму 1, неравенство (6) теоремы А и учитывая очевидное соотношение $A(r) < T(ch)/\ln c$ из (14), получим

$$\int_{E_2^{\alpha, \theta}} \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta dr < [T(cR_n)]^{\frac{17}{35}} L(R_n) R_n + o[T(cR_n)] R_n, \quad (15)$$

$R_n \rightarrow \infty.$

Из оценки $L(r) < [A(r)]^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ ($r > 0$), $r \in E$ ((1), п. 326), где E — некоторое множество конечной логарифмической меры, вытекает, что при $R_n > R_0$ в каждом интервале $(\frac{1+\alpha}{2} R_n, \frac{3+\alpha}{4} R_n)$ найдется такая точка $R_n' = \beta R_n$, в которой верно неравенство

$$L(R_n') = L(\beta R_n) < [A(\beta R_n)]^{\frac{1}{2}+\epsilon} \left[\left(\ln \frac{1}{\beta} \right)^{-1} T(R_n) \right]^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Окончательно, из (15) имеем

$$\int_{E_2^{\alpha, \theta}} \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta dr = o[T(cR_n)] R_n. \quad (16)$$

Отсюда, применяя лемму 1.3.1 работы (5), получим утверждение теоремы 1.

Доказательство следствия следует из теоремы 1 и неравенства (1).

Доказательство теоремы 2 легко провести, используя лемму 3 и неравенство (16).

Автор благодарен Г. А. Барсегяну за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ հետևյալ մոտարկման ֆունկցիաների համար ($z = re^{i\varphi}$)

$$P_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - a)|^k d\varphi,$$

$$Q_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(z, a)} \left| \frac{w^{(k)}(z)}{w(z) - a} \right|^k d\varphi,$$

որտեղ $w(z)$ -ը մերոմորֆ է $\mathbb{C}$ -ում, $\Delta(r, a) = \{z : |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$,
 $k \in \mathbb{N}$ տեղի ունեն Վարտանի նույնության տիպի առնչություններ: Որպես
 հետևանք ստացվում է այդ առնչության անալոգը ψ . Պետրենկոյի ածի տե-
 սությունում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции, М—Л., ГИТТЛ, 1941.
- 2 Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, Изв. АН. Армении, Математика (в печати).
- 3 W. Fuchs. Ann. Math., v. 68, № 2 (1956).
- 4 W. Fuchs. Ill. J. Math., v. 7, № 4 (1963).
- 5 В. П. Петренко. Рост мероморфных функций, Вища школа, Харьков, 1978.
- 6 У. К. Хейман. Мероморфные функции, М., 1966.
- 7 Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, Изв. АН Арме-
 нии, Математика, т. 25, № 5 (1990).
- 8 Г. А. Барсегян, Изв. АН АрмССР, Математи-
 ка, т. 20, № 5 № 6 (1985).
- 9 Г. А. Барсегян, Мат. сб., т. 114(156) (1981).