ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. Н. Акопян

Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, ослабленного трещинами

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 30/VII 1991)

Многие смешанные краевые задачи анизотропного или кусочно-однородного клина рассмотрены в работах ([1-4]).

В настоящей статье рассматривается антиплоское напряженное состояние анизотропного составного клина, ослабленного одним или несколькими трещинами. Задача в общем случае математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой строится методом ортогональных многочленов. В одном частном случае получено замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть упругий составной клин из двух разнородных клиньев, изготовленных из материалов, обладающих цилиндрической анизотропией, с углами раствора α и β соответственно, по линии соединения на отрезках $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ослаблен трещинами и деформируется под воздействием касательных напряжений $\tau^{\pm}_{\theta i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, которые действуют на берегах трещин и вызывают антиплоскую деформацию.

При этом считается, что боковые кромки клиньев свободны от нагрузок и ось цилиндрической анизотропии проходит через вершину клина.

Необходимо определить контактные напряжения, действующие на участках контакта клиньев, их коэффициенты интенсивности в вершинах трещин, а также меры раскрытия трещин.

Для определенности в дальнейшем все величины, касающиеся верхнего или нижего клиньев, будут снабжены индексами 1 и 2 соответственно.

Тогда поставленная задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\tau^{(1)}_{\theta z}(r, \alpha) = \tau^{(2)}_{\theta z}(r, -\beta) = 0 \quad (0 < r < \infty);$$

$$\tau^{(1)}_{\theta z}(r, 0) = \tau^{(2)}_{\theta z}(r, 0); \qquad W^{(1)}(r, 0) = W^{(2)}(r, 0) \quad (r \overline{\in} L); \qquad (1.1)$$

$$\tau^{(1)}_{\theta z}(r, 0) = \tau^{+}_{\theta i}(r); \qquad \tau^{(2)}_{\theta z}(r, 0) = \tau^{-}_{\theta i}(r) \quad (r \in L).$$

где $\tau^{\pm}_{0i}(r)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — известные функции, характеризующие заданные на берегах трещины нагрузки, а $L = \bigcup\limits_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$.

При этом функции перемещения $W^{(i)}(r, \theta)$ $(i = 1, 2)$, каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению ([1])

$$\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W^{(i)}}{\partial r} - \frac{2\lambda_i}{r}\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial r \partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial\theta^2} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda_i = a^{(i)}_{45}/a^{(i)}_{55}$ — соотношение упругих постоянных соответствующих материалов ([1])

Интегрируя уравнения (1. 2) и удовлетворяя условиям (1. 1), для определения мер раскрытия трещин получим следующую систему интегральных уравнений:

$$2\varkappa \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} R(r, r_0)\, W_i(r_0)\, dr_0 = -rf_j(r), \quad (1,3)$$

$$(a_j < r < b_j; \quad j = 1, 2, \ldots N),$$

которую нужно решить при условиях

$$W(a_i) = W(b_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots N). \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения

$$W(r) = W^{(1)}(r, 0) - W^{(2)}(r, 0) \quad (r \in L);$$

$$R(r, r_0) = \frac{1}{\pi\varkappa^+}\left[\frac{1}{\ln(r_0/r)} + \varkappa^+ R_1(r, r_0)\right];$$

$$R_1(r, r_0) = \int_0^{\infty}\left[\frac{\operatorname{ch}\vartheta^+ s - \operatorname{ch}\vartheta^- s}{\varkappa^+ \operatorname{sh}\vartheta^+ s + \varkappa^- \operatorname{sh}\vartheta^+ s} - \frac{1}{\varkappa^+}\right]\sin(s\ln(r_0/r))\, ds;$$

$$f_j(r) = -\varkappa_1\left\{\tau^+_{0j}(r) - \tau^-_{0j}(r) - \sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i} K(r, r_0)(\tau^+_{0i}(r_0) - \tau^-_{0i}(r_0))\, dr_0\right\};$$

$$K(r, r_0) = \frac{1}{2\pi i r}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty}\frac{\operatorname{tg}(e_1\alpha s) - \varkappa\operatorname{tg}(e_2\alpha s)}{\operatorname{tg}(e_1\alpha s) + \varkappa\operatorname{tg}(e_2\alpha s)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^s ds;$$

$$d_i = (a^{(i)}_{45})^2 - (a^{(i)}_{44})^2; \quad \varkappa_i = \frac{d_i}{e_i a^{(i)}_{55}}; \quad e_i = \sqrt{1 - \lambda_i^2}; \quad (i = 1, 2);$$

$$\vartheta^{\pm} = e_1\alpha \pm e_2\beta; \quad \varkappa^{\pm} = 1 \pm \varkappa; \quad \varkappa = \varkappa_1/\varkappa_2.$$

Далее, для решения системы (1.3) на каждом интервале $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ перейдем к новым переменным по формулам

$$r_0 = \exp[c_i s + d_i], \qquad r = \exp[c_i x + d_i],$$

где

$$c_i = \frac{1}{2} \ln(b_i/a_i) \quad \text{и} \quad d_i = \frac{1}{2} \ln(a_i \cdot b_i).$$

Тогда систему (1.3) можно записать в виде:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_i(s)}{s - x} ds + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{-1}^{1} Q_{i,j}(x, s) \varphi_j(s) \, ds = F_i(x); \tag{1.5}$$

$$(-1 < x < 1; \quad i = 1, 2, \ldots N).$$

Здесь

$$\varphi_i(x) = \exp[c_i x + d_i] \, W'(\exp[c_i x + d_i]);$$

$$F_i(x) = -\frac{\pi x^+}{2x} \exp[c_i x + d_i] f_i(\exp[c_i x + d_i]);$$

$$Q_{i,j}(x, s) = \frac{c_i(1 - \delta_{ij})}{c_j s - c_i x + d_j - d_i} + x^+ R_1(\exp[c_i x + d_i], \exp[c_i s + d_i]).$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

2. Решение системы (1. 5) представим в виде бесконечного ряда

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n^{(i)} T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots N), \tag{2.1}$$

где $T_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ — многочлены Чебышева первого рода, а $X_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots N;\ n = 0, 1, 2 \ldots)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражения функций $\varphi_i(x)$ из (2. 1) в (1. 5) по известной процедуре (⁵), придем к следующей эквивалентной системе бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m^{(i)} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i,j)} X_n^{(j)} = C_m^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots N; \quad m = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

$$A_{m,n}^{(i,j)} = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} U_{m-1}(x) \sqrt{1 - x^2} \, dx \int\limits_{-1}^{1} Q_{i,j}(x, s) \frac{T_n(s)}{\sqrt{1 - s^2}} ds;$$

$$C_m^{(i)} = -\sum_{j=1}^{N} A_{m,0}^{(i,j)} X_0^{(j)} + \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} F_i(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1 - x^2} \, dx, \tag{2.3}$$

где $U_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Исходя из того, что ядра бесконечных систем $A^{(i,j)}_{m,n}$ — регулярные функции, легко доказать ([5,6]), что система (2,3) квазивполне регулярна.

Теперь, интегрируя (2. 1), найдем меры раскрытия трещин. Они выражаются формулами

$$W_i(\exp[c_i x + d_i]) = c_i \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)} U_{n-1}(x) \sqrt{1-x^2} + c_i X_0^{(i)} \arcsin x + q_i \quad (2.4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots N),$$

где q_i $(i = 1, 2, \ldots N)$ — постоянные интегрирования. Удовлетворяя условиям (1.4), найдем $X_0^{(i)} = q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots N)$.

Контактные напряжения вне трещин найдем из уравнения (1.5) при $(|x| > 1)$. Они имеют вид:

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(x^*) = \frac{x^*}{\pi \varkappa^+ \varkappa_2} \left\{ \frac{2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{sgn}\,x - 1}{\sqrt{x^2-1}\,[2|x| - \sqrt{x^2-1}]} \times \right.$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(i)}}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] -$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(j)} \int_{-1}^{1} Q_{i,j}(x, s) \frac{T_n(s)\,ds}{\sqrt{1-s^2}} \right\} -$$

$$- c_i \sum_{j=1}^{N} \int_{-1}^{1} K(x^*, s^*)\, s^* (\tau_{0j}^+ - \tau_{0j}^-)\,ds;$$

$$(x^* = \exp[c_i x + d_i]; \quad |x| > 1).$$

При этом коэффицненты интенсивности этих напряжений K в точках a_i и b_i определяются соотношениями:

$$K(a_i) = \frac{1}{\pi \varkappa_2 \varkappa^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n^{(i)}}{n}; \qquad K(b_i) = \frac{1}{\pi \varkappa_2 \varkappa^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(i)}}{n}.$$

Отметим, что в частном случае, когда $\varkappa^- = 0$, уравнение (1.3) при помощи замены переменных $s = r_0^{\varkappa/\gamma}$ и $x = r^{\varkappa/\gamma}$ сводится к системе сингулярных интегральных уравнений ([4])

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\bar{a}_i}^{\bar{b}_i} \frac{V_i(s)}{s-x} ds = F_j(x) \qquad (\bar{a}_j < x < \bar{b}_j; \quad j = 1, 2, \ldots N), \quad (2.5)$$

которая допускает замкнутое решение ([1])

$$V_l = \frac{(-1)^{N-l+1}\left\{\frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{N-i}\int\limits_{\bar{a}_i}^{\bar{b}_i}\sqrt{\left|\prod\limits_{j=1}^{N}(t-\bar{a}_j)(t-\bar{b}_j)\right|}\,\frac{F_i(t)}{t-x}\,dt\right\}}{\pi\sqrt{\left|\prod\limits_{i=1}^{N}(x-\bar{a}_i)(x-\bar{b}_i)\right|}}, \tag{26}$$

$$(\bar{a}_l < x < \bar{b}_l;\quad l = 1,\ 2, \ldots N)$$

где

$$V_i(s) = s^{\gamma/\pi} W_i(s^{\gamma/\pi});\qquad F_i(x) = \frac{\pi\varkappa^+}{2\varkappa}\, x^{\gamma/\pi - 1/2} f_i(x^{\gamma/\pi});$$

$$\bar{a}_i = a_i^{\pi/\gamma};\qquad \bar{b}_i = b_i^{\pi/\gamma}\qquad (i = 1,\ 2, \ldots N).$$

Далее, приведем формулы для остальных важных механических характеристик в случае, когда имеется только одна трещина и

$$W(r) = \varkappa^* \int\limits_b^a \ln\left|\frac{A}{B}\right| dr_0.$$

где

$$A = (\bar{b}-\bar{a})^2 - 4\left(r^{\pi/\gamma} - \frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right)\left(r_0^{\pi/\gamma} - \frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right) +$$

$$+ 4\sqrt{(r^{\pi/\gamma}-\bar{a})(\bar{b}-r^{\pi/\gamma})(r_0^{\pi/\gamma}-\bar{a})(\bar{b}-r_0^{\pi/\gamma})}.$$

$$B = (\bar{b}-\bar{a})^2 - 4\left(r^{\pi/\gamma} - \frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right)\left(r_0^{\pi/\gamma} - \frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right) -$$

$$- 4\sqrt{(r^{\pi/\gamma}-\bar{a})(\bar{b}-r^{\pi/\gamma})(r_0^{\pi/\gamma}-\bar{a})(\bar{b}-r_0^{\pi/\gamma})}.$$

$$(a < r < b)$$

$$\tau_{\theta z}(r) = -\frac{\tau_0}{\pi}\times$$

$$\times\frac{\left|\sqrt{(r^{\pi/\gamma}-\bar{a})(r^{\pi/\gamma}-\bar{b})}\,\mathrm{sgn}\left(r^{\pi/\gamma}-\frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right)-\frac{\bar{b}-\bar{a}}{2}\right| r^{\pi/2\gamma} I_1(r^{\pi/\gamma})}{r\sqrt{(r^{\pi/\gamma}-\bar{a})(r^{\pi/\gamma}-\bar{b})}\left|\left|r^{\pi/\gamma}-\frac{\bar{b}+\bar{a}}{2}\right|-\sqrt{(r^{\pi/\gamma}-\bar{a})(r^{\pi/\gamma}-\bar{b})}\right|};$$

$$I_1(x) = \int\limits_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{\xi^{\gamma/\pi}\sqrt{(\xi-\bar{a})(\bar{b}-\xi)}}{\sqrt{\xi}\,(\xi-x)}\,d\xi;\qquad (0 < x < \bar{a};\quad \bar{b} < x < \infty)$$

$$K(a) = \frac{\tau_0}{\pi}\,\frac{a^{\pi/2\gamma+1} I_1(a^{\pi/\gamma})}{\sqrt{\bar{b}-\bar{a}}};\qquad K(b) = \frac{\tau_0}{\pi}\,\frac{b^{\pi/2\gamma+1} I_1(b^{\pi/\gamma})}{\sqrt{\bar{b}-\bar{a}}};$$

$$x^* = \frac{\tau_0 x^+ x_2}{\pi(\bar{b} - \bar{a})}; \qquad \bar{a} = a^{\pi/\gamma}; \quad \bar{b} = b^{\pi/\gamma}.$$

В конце заметим, что все полученные результаты имеют место и в случае изотропных материалов.

Институт механики
Академии наук Армении

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ճաքերով թուլացված բաղադրյալ անիզոտրոպ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը

Դիտարկված է գլանային անիզոտրոպիայով օժտված երկու սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն սեպերի միացման գծի երկարությամբ թուլացված է մեկ կամ մի քանի ճաքերով։

Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է ինտեգրալ հավասարումների համակարգի ձևով, որի լուծումը կառուցված է Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ։ Մի մասնավոր դեպքում կառուցված է խնդրի փակ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропных тел, М., Наука, М., 1977. 2 *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 25, № 2(1972). 3 *В. М. Александров, С. М. Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983. 4 *И. Я. Штаерман*, Контактная задача теории упругости, ГИТТЛ, М.—Л., 1949. 5 *К. С. Чобанян*, Напряжения в составных упругих телах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987. 6 *М. П. Саврук*, Механика разрушения, т. 2, Наукова думка, Киев, 1988. 7 *А. М. Саргсян*, в кн.: Механика деформируемого твердого тела, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1991.