УДК 517.984

А. Бёттхер, Х. Вольф

Метод коллокации для операторов Теплица в пространствах
 М. М. Джрбашяна

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 21/X 1991)

Пространством Джрбашяна A_α^2 называется гильбертово пространство всех голоморфных в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f , для которых

$$\|f\|^2 = (\alpha + 1) \int_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) < \infty,$$

где $dA = r dr d\theta / \pi$ — нормированная двумерная мера Лебега и $\alpha > -1$ является параметром. Скалярное произведение в A_α^2 определяется равенством

$$(f, g) = (\alpha + 1) \int_D f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Пространство A_α^2 является подпространством пространства $L_\alpha^2(D)$, и ортогональный проектор $P: L_\alpha^2(D) \rightarrow A_\alpha^2$ действует по правилу

$$(Pf)(z) = (\alpha + 1) \int_D f(\omega) (1 - z\bar{\omega})^{-\alpha-2} (1 - |\omega|^2)^\alpha dA(\omega) \quad (z \in D).$$

Интересные исторические замечания и подробное изложение теории пространств A_α^2 можно найти в книге А. Э. Джрбашяна и Ф. А. Шамомяна (1).

Пусть $a \in C(\bar{D})$ непрерывная в замкнутом единичном круге $\bar{D}$ функция. Оператор

$$T(a): A_\alpha^2 \rightarrow A_\alpha^2, \quad f \mapsto P(af)$$

называется оператором Теплица, порожденным функцией a . Отметим, что уравнение $T(a)f = g$ может быть записано как интегральное уравнение

$$(\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \omega(\omega) \frac{(1 - |\omega|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\omega})^{\alpha+2}} f(\omega) dA(\omega) = g(z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Полагаем $\chi_n(z) = z^n$ ($n \geq 0$). Одночлены $\chi_n(z)$ принадлежат A_α^2 , и ортонормированные одночлены

$$e_n(z) = (\Gamma(n/2 + 1) \Gamma(\alpha + 2) / \Gamma(n/2 + \alpha + 2)) z^n$$

образуют ортонормированный базис в A_α^2 . Обозначаем через

$$P_n : A_\alpha^2 \rightarrow \text{span} \{ \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n \} = \text{span} \{ e_0, e_1, \dots, e_n \}$$

ортгональный проектор.

Метод редукций (или метод $\{P_n, P_n\}$) для приближенного решения уравнения $T(\alpha)f = g$ состоит в следующем. Ищется приближенное решение f_n в виде многочлена степени не выше n , так, чтобы совпадали первые $n+1$ коэффициентов Тейлора (в точке O) функций $T(\alpha)f_n$ и g . Иными словами, уравнение $T(\alpha)f = g$ заменяется приближенным уравнением

$$P_n T(\alpha) f_n = P_n g \quad (f_n \in \text{Im } P_n). \quad (1)$$

Будем говорить, что метод редукции (или метод $\{P_n, P_n\}$) применим к обратимому оператору Теплица $T(\alpha)$ в A_α^2 , если существует $n_0 \geq 0$ такое, что уравнения (1) однозначно разрешимы для всех $n \geq n_0$ и всех $g \in A_\alpha^2$ и приближенные решения f_n сходятся по норме пространства A_α^2 к (точному) решению f уравнения $T(\alpha)f = g$ при $n \rightarrow \infty$. В работе (2) мы доказали, что метод редукции применим к всякому обратимому оператору Теплица.

Настоящая заметка посвящена двум другим методам приближенного решения уравнения $T(\alpha)z = g$. Пусть $0 < r < 1$. Полагаем

$$\gamma_{j,n} = r e^{2\pi i j / (n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \dots, n),$$

т. е. $\gamma_{j,n}$ — нули многочлена $z^{n+1} - r^{n+1}$, а также определяем функции $K_{j,n} \in A_\alpha^2$ равенствами

$$K_{j,n}(z) = (1 - z\bar{\gamma}_{j,n})^{-\alpha-2} \quad (z \in \mathbb{D}). \quad (2)$$

Мы здесь ищем приближенное решение f_n уравнения $T(\alpha)f = g$ или в виде многочлена степени не выше n , или в виде линейной комбинации функций $K_{0,n}, \dots, K_{n,n}$, а неизвестные коэффициенты многочлена или линейной комбинации определяются коллокационными уравнениями

$$(T(\alpha)f_n)(\gamma_{j,n}) = g(\gamma_{j,n}) \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

Обозначаем через

$$L_n : A_n^2 \rightarrow \text{span} \{ \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n \} = \text{span} \{ e_0, e_1, \dots, e_n \}$$

интерполяционный проектор с узлами $\gamma_{0,n}, \dots, \gamma_{n,n}$, т. е. проектор, сопоставляющий функции $f \in A_n^2$ многочлен $L_n f \in \text{Im } P_n$ такой, что $(L_n f)(\gamma_{j,n}) = f(\gamma_{j,n})$ при $j = 0, 1, \dots, n$. Имеем

$$L_n f = \sum_{j=0}^n f(\gamma_{j,n}) l_{j,n},$$

где лагранжевы многочлены $l_{0,n}, \dots, l_{n,n}$ определены уравнениями

$$l_{j,n}(\gamma_{k,n}) = \delta_{j,k} \quad (j, k \in \{0, \dots, n\}).$$

В силу воспроизводящего свойства функций («ядер») (2) имеют место равенства

$$f(\gamma_{j,n}) = (f, K_{j,n}) \quad (f \in A_n^2).$$

Итак, можно также записать

$$L_n f = \sum_{j=0}^n (f, K_{j,n}) l_{j,n}.$$

Из этого представления немедленно получаем следующую формулу для сопряженных проекторов L_n^*

$$L_n^* f = \sum_{j=0}^n (f, l_{j,n}) K_{j,n}.$$

Таким образом, коллокационные методы, упомянутые выше, могут быть интерпретированы заменой уравнения $T(a)f = g$ приближенными уравнениями

$$L_n T(a) f_n = L_n g \quad (f_n \in \text{Im } P_n), \quad (3)$$

соответственно

$$L_n T(a) f_n = L_n g \quad (f_n \in \text{Im } L_n^*), \quad (4)$$

Будем говорить, что метод $\{L_n, P_n\}$ (соответственно $\{L_n, L_n^*\}$) применим к обратимому оператору Тейлица $T(a)$, если существует $n_0 \geq 0$, такое, что уравнения (3) (соответственно (4)) имеют единственное решение f_n при всех $n \geq n_0$ и всех $g \in A_n^2$ и функции f_n сходятся к (точному) решению f уравнения

$$T(a)f = g \text{ в норме пространства } A_n^2 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Методы $\{L_n, P_n\}$ и $\{L_n, L_n^*\}$ применимы к каждому обратимому оператору Тейлица $T(a)$.

Доказательство опирается на наблюдение, что матричное представление проекторов L_n относительно базиса $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & D_1 & D_2 & D_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $D_1, D_2, D_3, \dots$ — следующие диагональные матрицы:

$$D_1 = \text{diag} \left(\frac{(e_{n+1}, K_{0,n})}{(e_0, K_{0,n})}, \dots, \frac{(e_{2n+1}, K_{0,n})}{(e_n, K_{0,n})} \right),$$

$$D_2 = \text{diag} \left(\frac{(e_{2n+2}, K_{0,n})}{(e_0, K_{0,n})}, \dots, \frac{(e_{3n+2}, K_{0,n})}{(e_n, K_{0,n})} \right),$$

Отсюда вытекает (неожиданный!) факт, что

$$\|L_n - P_n\| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|L_n^* - P_n^*\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

и вследствие этого нашу теорему можно почти непосредственно вывести из применимости метода $\{P_n, P_n\}$ к каждому обратимому оператору Теплица $T(a)$.

Отметим, что применимость методов $\{L_n, P_n\}$ и $\{L_n, L_n^*\}$ существенно зависит от специального выбора коллокационных узлов $\tau_{j,n}$. Пусть, например, $r \in (0, 1)$ и

$$\beta_{j,n} = -r + j(2r)/n \quad (j = 0, \dots, n).$$

Обозначим теперь через $R_n: A_n^2 \rightarrow \text{Im } P_n$ интерполяционный проектор с узлами $\beta_{0,n}, \dots, \beta_{n,n}$.

Теорема 2. *Проекторы R_n сильно не сходятся к единичному оператору в пространстве A_n^2 . В частности, метод $\{R_n, P_n\}$ не применим к единичному оператору, и, тем более, не применим к каждому обратимому оператору Теплица.*

Доказательство этой теоремы основано на том обстоятельстве, что сходимость в A_n^2 влечет за собой поточечную сходимость в D и что можно указать $h \in (0, 1)$ и $a \in (1, \infty)$, такие, что

$$(R_n f)(ih) \rightarrow f(ih) \quad \text{для} \quad f(z) = 1/(z-a) \quad z \in D.$$

Наконец, отметим, что мы также изучили матричный случай, т. е. применимость методов $\{P_n, P_n\}$, $\{L_n, P_n\}$, $\{L_n, L_n^*\}$ к операторам Теплица $T(a)$ в прямой сумме N экземпляров A_n^2 , порожденным матричными функциями a порядка N с элементами из $C(\bar{D})$. В этой ситуации проявляется новый (но для специалистов, наверное, не удивительный) эффект. Для матричной функции a с элементами из $C(\bar{D})$ обозначим через $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность коэффициентов Фурье ограниченной функции $a|_{\partial D}$ и через $W(a)$ дискретный мат-

ричный оператор Винера—Хопфа, действующий в прямой сумме N экземпляров пространства l^2 по правилу

$$(W(\bar{a})\varphi)_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-j} \varphi_k \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 3. Пусть a — матричная функция с элементами из $\mathcal{C}(\bar{D})$. Для того, чтобы к оператору $T(a)$ был применен метод $\{P_n, P_n\}$ (соответственно $\{L_n, P_n\}$ или $\{L_n, L_n\}$), необходимо и достаточно, чтобы оба оператора $T(a)$ и $W(\bar{a})$ были обратимыми в соответствующей прямой сумме N экземпляров пространств A^2 и l^2 .

Доказательство такой теоремы требует более мощных средств, в частности, некоторых результатов Б. Зильберманна (см. главу 7 книги (2)).

Технический университет
Кембридж (ФРГ)

Ա. ԲՅՈՏԵՆԵՐ, Հ. ՎՈՒՅ

Տեղադրման եղանակը Տյոպլիցի օպերատորների համար
Մ. Զրբաշյանի տարածություններում

Մ. Զրբաշյանի A^2 տարածություններում դիտարկվում է տեղադրման (կոնկացիայի) եղանակը Տյոպլիցի օպերատորների համար: Ցույց է տրված, որ այդ եղանակը կարելի է կիրառել շրջվող օպերատորի նկատմամբ, երբ մատավոր լուծումը փնտրվում է որպես բազմանդամ կամ որպես հատուկ բնորոշված կորիզների գծային կոմբինացիա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԲՈՒՆ

¹ A. E. Djrbashtian, F. A. Shamolian, Topics in the Theory of A^p Spaces, BSB-Teubner, Leipzig, 1968. ² A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1990.