

МАТЕМАТИКА

УДК 518.9

В. С. Амбарин

Минимальное и максимальное время поимки для точек
круга Аполлония

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукурбяном 14/X 1991)

Пусть преследователь P и преследуемый E перемещаются в плоскости с постоянными по модулю скоростями α и β соответственно. В начальный момент времени $t=0$ игроки P, E находятся в точках $P(O), E(O)$. Выберем систему координат таким образом, чтобы точки $P(x_1, y_1)$ и $E(x_2, y_2)$ в начальный момент лежали на оси OX . Известно, что при применении игроком P стратегий параллельного сближения (сокращенно Π -стратегия) и при прямолинейном движении игрока E множество точек встречи является окружностью Аполлония. Также известно, что при всевозможных кусочно-постоянных стратегиях игрока E множество точек встречи содержится в круге Аполлония ⁽¹⁾.

Пусть M любая точка круга Аполлония. Обозначим через V_M множество всех стратегий игрока E , при которых встреча происходит в точке M , а P использует Π -стратегию.

Здесь стратегии определены как в ⁽¹⁾. Для каждой конкретной стратегии $v \in V_M$ время встречи при использовании игроком P Π -стратегии определяется однозначно. Обозначим это время через t_v , а множество времен встречи для различных стратегий $v \in V_M$ (когда встреча происходит в точке M) обозначим через T_M . Найдем

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} \text{ и } \max_{v \in V_M} \{T_M\}.$$

Очевидно, что

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} \geq \frac{|P(O)M|}{\alpha}.$$

Покажем существование стратегии $v_{\min}^M$ игрока E , при которой P , при применении им стратегии параллельного сближения, движется прямолинейно к точке M . Стратегия $v_{\min}^M$ показана на рис. 1. Игрок E выбирает направление к точке A и движется к ней по прямой. Игрок P тоже движется к точке A , прямолинейно через M . В точке A

игрок E делает поворот на $\pi - 2\Delta$ (где Δ — угол $\angle A E(0) X$), а P продолжает двигаться к точке M прямолинейно, и встреча происходит в точке M .

Прежде чем найти максимум времени встречи, докажем две леммы.

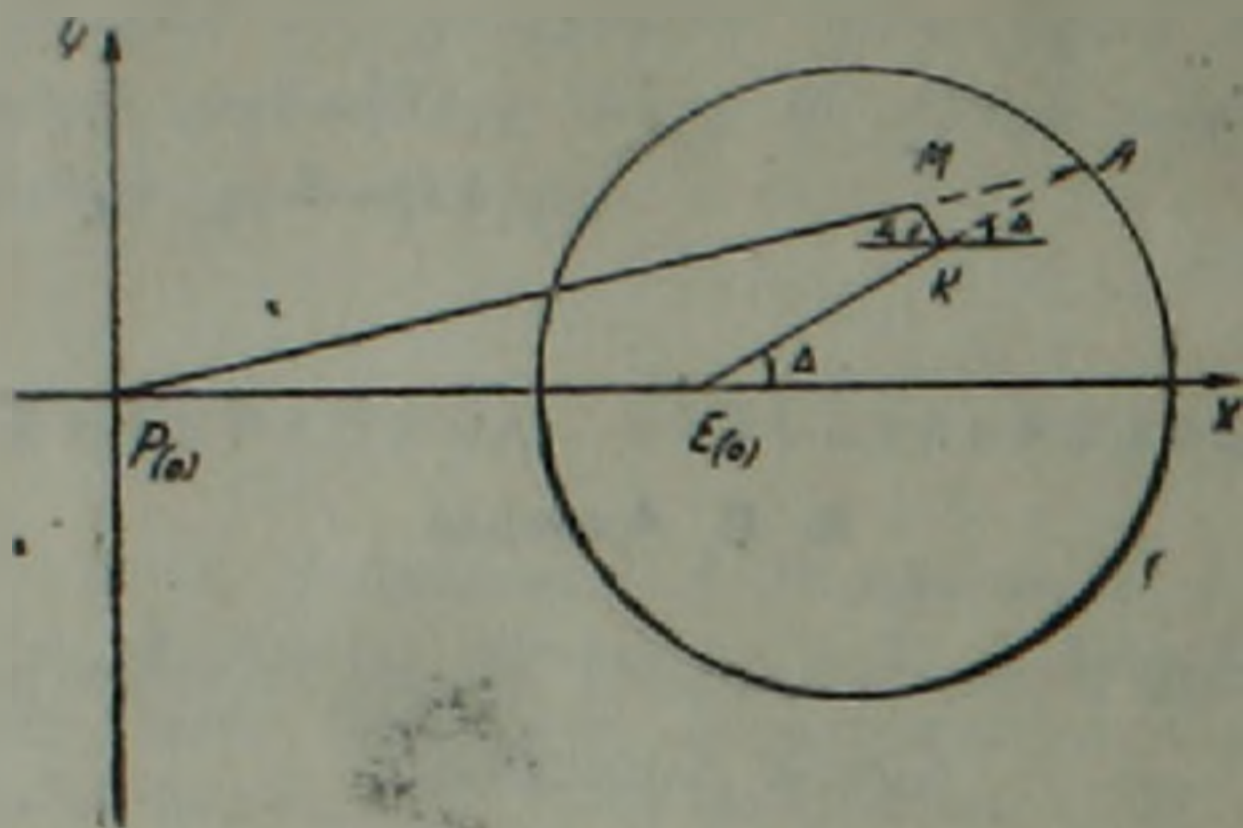


Рис. 1

Предположим, игрок E движется по некоторой кривой линии, а игрок P применяет П-стратегию и M — точка встречи. Обозначим через t соответствующее время встречи.

Поскольку при использовании игроком P стратегии параллельного сближения отрезок $|PE|$ остается параллельным отрезку $|P(0)E(0)|$, т. е. оси OX , то проекции скоростей игроков P и E на ось OY равны между собой ($\dot{y}_1 = \dot{y}_2$).

Движение игрока E описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_2 = v(t),$$

$$\dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t)}, \quad ((\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2 = \beta^2).$$

Движение игрока P при использовании им стратегии параллельного сближения описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\alpha^2 - (\dot{y}_1)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + v^2(t)} = \sqrt{c^2 + v^2(t)}, \quad (\alpha^2 - \beta^2 = c^2, \quad c > 0),$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t)}.$$

Ясно, что

$$|P(0)M_x| = \int_0^t \sqrt{c^2 + v^2(t)} dt. \quad (1)$$

$$|E(0)M_x| = \int_0^t v(t) dt, \quad (2)$$

где M_x проекция точки M на ось OX .

Из теоремы о среднем имеем:

$$\int_0^t \sqrt{c^2 + v^2(t)} dt = \sqrt{c^2 + v(t'') \cdot t} \quad (3)$$

$$\int_0^t v(t) dt = v(t') \cdot t, \quad \text{где } t', t'' \in [0, t]. \quad (4)$$

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$v(t') \leq v(t'').$$

Доказательство. Составим разность

$$t^2 (v^2(t'') - v^2(t')) = \left(\int_0^t (c^2 + v^2(t))^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 - \left(\int_0^t c dt \right)^2 - \left(\int_0^t v(t) dt \right)^2. \quad (5)$$

Согласно неравенству Минковского для интегралов ⁽²⁾, если $0 < k < 1$, то

$$\begin{aligned} \left(\int (f + g + \dots + l)^k dx \right)^{1/k} &\geq \left(\int f^k dx \right)^{1/k} + \\ &+ \left(\int g^k dx \right)^{1/k} + \dots + \left(\int l^k dx \right)^{1/k} \end{aligned} \quad (6)$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f, g, \dots, l$ пропорциональны.

При $k = \frac{1}{2}$ из неравенства (6) следует

$$v(t'') - v(t') \geq 0.$$

Лемма доказана.

Построим перпендикуляр m к прямой $(P(0)E(0))$, проходящий через точку M . Допустим, m пересекает окружность Аполлония в точках B_1 и B_2 . Далее допустим $|MB_1| < |MB_2|$.

Пусть E движется по полупрямой $[E(0), B_1]$. Тогда движение игроков E и P описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_2 = v_1,$$

$$\dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v_1^2},$$

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + v_1^2} = \sqrt{c^2 + v_1^2},$$

$$\dot{y}_1 = \sqrt{\beta^2 - v_1^2},$$

где τ_1 — постоянная величина. Время встречи в точке B_1 обозначим через t_1 .

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$t \leq t_1.$$

Прежде чем доказать лемму, рассмотрим одно замечание.

Замечание. Если две точки окружности Аполлония a_1 и a_2 находятся справа (слева) от перпендикуляра l к отрезку $|P(0)E(0)|$ в точке $E(0)$ и $a_{1x} \leq a_{2x}$ (a_{1x} и a_{2x} — проекции точек a_1 и a_2 на ось OX соответственно), то

$$\sqrt{c^2 + (v^1)^2} \leq \sqrt{c^2 + (v^2)^2} \quad (\sqrt{c^2 + (v^1)^2} \geq \sqrt{c^2 + (v^2)^2}).$$

где $\sqrt{c^2 + (v^i)^2}$ — проекция скорости P на ось OX , когда встреча происходит в точке a_i , $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 2. Допустим, что точка M находится справа (слева) от перпендикуляра l (см. рис. 2). Учитывая (3) и (4), рассмотрим следующие прямолинейные движения игроков E и P :

$$\dot{x}_2 = v(t''),$$

$$\dot{x}_1 = \sqrt{c^2 + v^2(t'')},$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t'')}$$

и обозначим точку встречи через A^* . Заметим, что точка A^* находится на окружности Аполлония и в силу леммы 1 A^* не может находиться слева (справа) от точки B_1 .

Следовательно

$$\sqrt{c^2 + v_1^2} < \sqrt{c^2 + v^2(t'')}.$$

Далее имеем

$$t = \frac{|P(0)M_x|}{\sqrt{c^2 + v^2(t'')}} < \frac{|P(0)M_x|}{\sqrt{c^2 + v_1^2}} = t_1.$$

Теперь пусть точка M находится на перпендикуляре l . Тогда $v_1 = v(t') = 0$.

Очевидно, что из

$$c = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \leq \sqrt{c^2 - v^2(t'')}$$

следует $t \leq t_1$.

Лемма доказана.

Таким образом доказана

Теорема.

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} = \frac{|P(0)M|}{\alpha} \quad \text{и} \quad \max_{v \in V_M} \{T_M\} = \frac{|P(0)B_1|}{\alpha}.$$

На рис. 2 показана стратегия $v_{\max}^M$ игрока E , при которой встреча происходит в точке M с максимальным временем ($|B_1L| = |LM|$).

Следствие. Пусть M и N любые точки круга Аполлония и имеет место неравенство

$$M_x \leq N_x,$$

где M_x и N_x проекции точек M и N на ось OX .

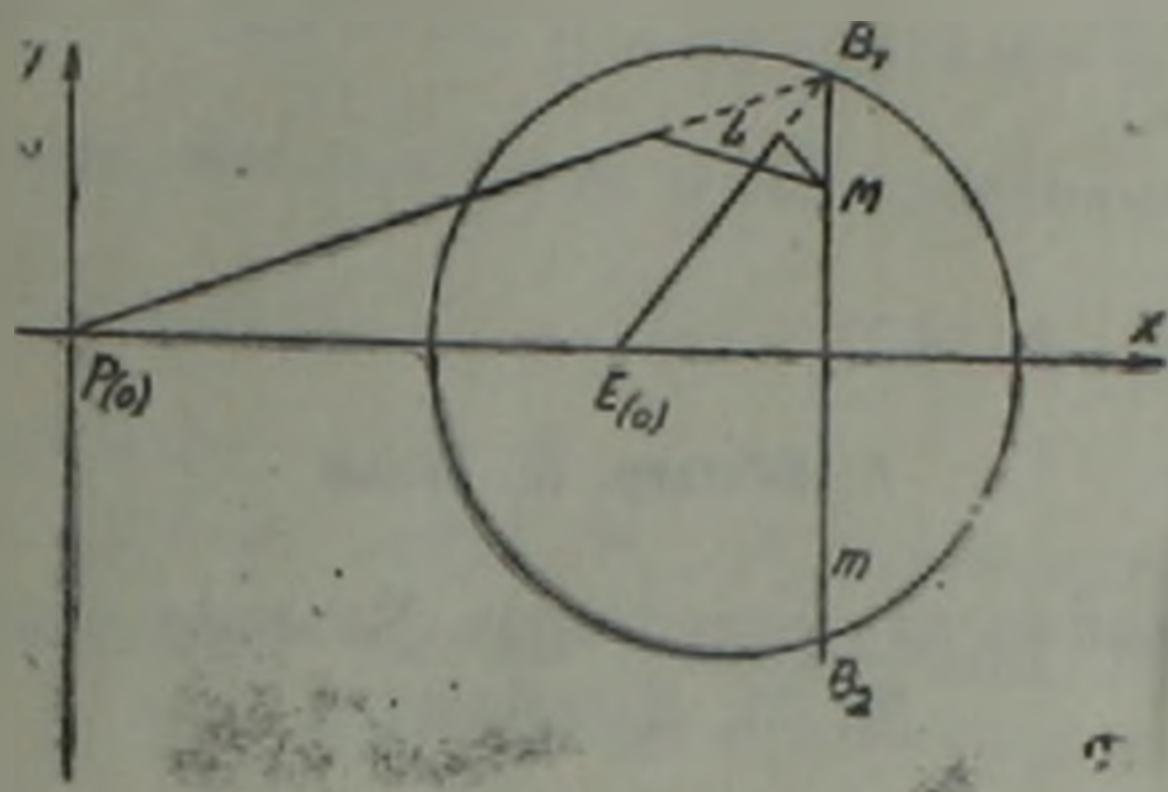


Рис. 2

Тогда справедливо

$$t_{V_{\max}}^M < t_{V_{\max}}^N$$

и равенство имеет место только при $M_x = N_x$.

Доказательство следует из леммы 2.

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении

Վ. Ս. ՀԱՄԱՐՅԱՆ

Ապոլոնյան շրջանի կետերի միևնույն և մահսիմալ բռնվելու ժամանակները

Աշխատանքը վերաբերում է հարթության վրա պարզ հետապնդման խնդիրներին: Ծնթադրվում է, որ P հետապնդվողը կիրառում է զուգահեռ մոտեցման ստրատեգիա (Γ -ստրատեգիա):

Խնդիր է դրվում գտնել E հետապնդվողի այնպիսի շարժում, որի դեպքում հանդիպման ժամանակը մաքսիմալ (մինիմալ) է, այն պայմանով, որ Ապոլոնյան շրջանի M հանդիպման կետը ֆիքսված է: Այս խնդիրն ամբողջությամբ լուծված է: Կառուցվում է այն կետերի բազմությունը, որոնցում հանդիպման մաքսիմալ ժամանակը հաստատուն է: Այդպիսի կետերի բազմությունը համընկնում է $P(0)$, $E(0)$ ուղղուն ուղղահայաց ուղղի AB -ի այն հատվածների հետ, որոնք ընկած են Ապոլոնյան շրջանի մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. А. Петросян, ДАН СССР, т. 161, № 1, с. 52—54 (1965). ² Г. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948.