ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 93 1992 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 621.391

Л. Г. Хачатрян, О. С. Арутюнян

Построение новых классов минимальных широковещательных сетей

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 29/VIII 1991)

Коммуникационную сеть принято определять как связный граф $G=(V, E)$, где V—множество вершин или множество элементов коммуникационной сети, а E—множество ребер или множество коммуникационных линий.

Процесс распространения информации в коммуникационной сети с началом в некоторой вершине и до полного ее заполнения называется широковещанием, если имеют место следующие условия:

1) каждая передача информации требует затраты времени, которая принимается за единицу;

2) каждый элемент в течение единицы времени может передать информацию только одной из своих соседних вершин.

Минимальное время широковещания для информации, исходящей из вершины u, обозначим через $t(u)$. Для произвольного связного графа G введем обозначение $t(G)=\max\{t(u)\}$. Очевидно, что $t(G)\geqslant$ $\geqslant]\log_2 n[$, где n — число вершин графа (в каждый момент времени число вершин, обладающих информацией, может увеличиться не более чем в два раза).

Минимальной широковещательной сетью (МШС) называется граф на n вершинах, время широковещания которого равно $]\log_2 n[$. Обозначим через $B(n)$ минимальное число ребер всех МШС на n вершинах. МШС, имеющая $B(n)$ ребер, называется наименьшей широковещательной сетью (НШС).

До настоящего времени были известны значения величины $B(n)$ только для $n=2^m$ и $n<15$ ([1]). В работах ([2,3]) построены некоторые классы МШС и для $B(n)$ получены верхние оценки. В данной работе построены новые классы МШС, позволяющие улучшить оценки для $B(n)$, приведенные в ([2,3]), а в случае, когда $n=2^m-2$, найдено точное значение функции $B(n)$. В зависимости от количества элементов в коммуникационной сети рассмотрены три случая.

1. $n=2^m-2$.

Сначала заметим, что локальная степень любой вершины v каждой МШС на 2^m-2 вершинах удовлетворяет неравенству $\rho(v)\geqslant m-1$ (так как если $\rho(v)\leqslant m-2$ для некоторой вершины v, то широковещанием, начинающимся из v, за m единиц времени можно информировать не более чем $1+2^{m-1}+2^{m-2}+\dots+2^2=2^m-3<n$ вершин). Поэтому $B(2^m-2)\geqslant\frac{(2^m-2)(m-1)}{2}$. Следовательно, регулярный граф H (определяющий некую МШС) на $n=2^m-2$ вершинах является также НШС и $B(2^m-2)=\frac{(2^m-2)(m-1)}{2}$. Перейдем к построению графа H. Обозначим вершины графа через $v_0, v_1, \dots, v_{2^m-3}$. Две вершины v_i и v_j соединяются тогда и только тогда, когда $i+j=2^r-1 \bmod (2^m-2)$, где $r=1, 2, \dots, m-1$. Легко заметить, что полученный граф не имеет петель и является $(m-1)$-регулярным. Имеет место следующая.

Теорема 1. *Граф H является НШС и* $B(n)=B(2^m-2)=\frac{m}{2}n-\frac{n}{2}$.

2. $n=2^m-2^k$.

Пусть подмножество вершин M МШС $G(V, E)$ является вершинным покрытием, т. е. любое ребро G инцидентно некоторой вершине M. Допустим, что локальная степень вершины v_i, $\rho(v_i)\leqslant\log_2|V|-1$, где $v_i\in M$. Пусть также граф $G'(V', E')$ изоморфен графу $G(V, E)$; $(v_i, v_j)\in E\Leftrightarrow(v'_i, v'_j)\in E'$. Обозначим через $G_0(V_0, E_0)$ граф, определенный следующим образом: $V_0=V\cup V'$, $E_0=E\cup E'\cup\tilde{E}$, где $\tilde{E}=\{(v_i, v'_i)\colon v_i\in M\}$. Доказывается следующая

Лемма. *Граф $G_0(V_0, E_0)$ является МШС.*

Вышеприведенная лемма является основной для построения МШС на $n=2^m-2^k$ $(2<k\leqslant m-2)$ вершинах.

Сначала рассмотрим случай $k=2$, т. е. $n=2^m-4$. Пусть граф $H(V, E)$ является НШС на $2^{m-1}-2$ вершинах, описанной в пункте 1. Легко заметить, что множество всех вершин v_i, где i нечетно (четно), является вершинным покрытием графа H. $M=\{v_i\colon i$ — нечетно$\}$ и $\rho(v_j)=m-2=\log_2|V|-1$, где j — четно (нечетно). Таким образом, граф H удовлетворяет всем требованиям леммы и, следовательно, граф $H_0(V_0, E_0)$, являющийся объединением H и H' (H' изоморфен H), $V_0=V\cup V'$, $E_0=E\cup E'\cup\tilde{E}$, где $\tilde{E}=\{(v_i\colon v'_i)\colon i$ — четно$\}$, является МШС, число ребер которой $S(n)=\frac{m}{2}n-\frac{3}{4}n$. Нетрудно заметить, что граф H_0 также удовлетворяет требованиям леммы, откуда и получим МШС на $n = 2(2^m - 4) = 2^{m+1} - 8$ вершинах с $S(n) = \frac{m+1}{2}n - n$ ребрами. Аналогично продолжая этот процесс, можно построить МШС на $2^{k-2}(2^m - 4) = 2^{m+k-2} - 2^k$ вершинах. Таким образом имеет место следующая

Теорема 2. *Для любого $k = 2, 3, \ldots, n-2$ существует МШС на $n = 2^m - 2^k$ вершинах с числом ребер $S(n) = \frac{m}{2}n - \frac{k+1}{4}n$.*

3. $n = 2^m - 2^k - j$.

Пусть $n = 2^m - 2^k - j$, где $0 < j < 2^k$, $k \leqslant m-2$. Рассмотрим наименьшее широковещательное дерево ([4]) на $n = 2^m$ вершинах с корнем v (дерево с корнем v, для которого имеет место $t(v) =]\log_2 n[$). Через v_i $(i = 1, \ldots, m)$ обозначим ту соседнюю вершину v, которая при широковещании из вершины v получает информацию в момент времени i, а через u_i $(i = 1, \ldots, m-k)$ обозначим ту из соседних вершин v_i, которая получает информацию из v_i в момент времени $i+1$. Удалим корень v. Далее из полученного множества несвязных деревьев с корнями $v_1, v_2, \ldots, v_m$ удалим деревья с корнями $v_{m-k+1}, \ldots, v_m$, а из дерева с корнем v_{m-k} удалим j вершин, максимально удаленных от вершины v_{m-k}. В результате получим граф G на $n = 2^m - 2^k - j$ вершинах. Все вершины графа G, кроме соседних вершин u_i $(i = 1, \ldots, m-k)$ соединяются с вершиной v_i $(i = 1, \ldots, m-k)$. Можно доказать, что полученный граф G' является МШС, и, следовательно, имеет место следующая

Теорема 3. *Если $n = 2^m - 2^k - j$, где $0 < j < 2^k$, $k = 1, \ldots, m-2$, то существует МШС на n вершинах, число ребер которой равно*

$$S(n) = (m-k+1)n - m(k-2) - (k+2) + \frac{k(k+1)}{2}.$$

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении и
Ереванского государственного университета

Լ. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Հ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Մինիմալ սփռող ցանցերի նոր դասերի կառուցում

Ուսումնասիրվում է մինիմալ սփռող ցանցերի կառուցման խնդիրը։ G ցանցը կոչվում է մինիմալ սփռող ցանց, եթե նրա սփռման ժամանակը հավասար է՝ $t(G) =]\log_2 n[$, որտեղ n-ը ցանցի էլեմենտների քանակն է։ Ցանցի էլեմենտների քանակից կախված առաջարկվում են երեք նոր մեթոդներ մինիմալ սփռող ցանցեր կառուցելու համար։ $n = 2^m - 2$ դեպքում կառուցվում է H $(m-1)$-ռեգուլյար գրաֆը։ Թեորեմ 1-ը պնդում է, որ H գրաֆը փոքրագույն սփռող ցանց է, որի կողերի քանակը հավասար է՝

2—109

$B(n) = \frac{mn}{2} - \frac{n}{2}$։ Մինիմալ սփռող ցանցը կոչվում է փոքրագույն սփռող ցանց, եթե նրա կողերի քանակը (հաստատուն գագաթների քանակի դեպքում) փոքրագույնն է։ $n = 2^m - 2^k$ (թեորեմ 2) և $n = 2^m - 2^k - j$, որտեղ $0 < j < 2^k$ (թեորեմ 3), դեպքերում կառուցվում են մինիմալ սփռող ցանցեր, որոնց կողերի քանակները փոքր են մինչև այժմ հայտնի մինիմալ սփռող ցանցերի կողերի քանակներից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. M. Farley, S. T. Hedetniemi, A. Proskurowski e. a.*, Discrete Math., p. 189—193 (1979). [2] *A. M. Farley*, Networks, v. 9, p. 313—332 (1979). [3] *S. Chau, A. L. Liestman*, Simon Fraser University, Department of Computing Science. TR 84—8 (1984). [4] *A. Proskurowski*, IEEE Trans on Comput, v. 30, p. 363—366 (1981).