ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

С. Х. Дарбинян

О неполных гамильтоновых контурах в направленных графах

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукуряном 11/VII 1991)

В настоящей работе рассматриваются конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([1]). Обозначим через $D(n, p)$ орграф порядка p, полученный из контура длины p после переориентации $n-1$ последовательных дуг. При $n=2$ орграф $D(2, p)$ называется неполным гамильтоновым контуром. Известно ([2]), что если орграф G удовлетворяет достаточному условию гамильтоновости Гуйя-Ури ([3]) или Вудала ([4]), то G содержит неполный гамильтоновый контур. В ([5]) доказано, что орграфы, удовлетворяющие достаточному условию гамильтоновости Мейнила ([6]), также содержат неполные гамильтоновые контуры (кроме некоторых описанных случаев).

Цель настоящей статьи показать, что любой p-вершинный ($p\geqslant 12$) направленный граф с минимальной полустепенью не меньше, чем $[(p-2)/2]$, содержит неполные гамильтоновые контуры. Заметим, что ранее в ([7]) было доказано, что такие направленные графы, при $p\geqslant 10$, содержат орграфы $D(3, p)$.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множество вершин и множество дуг орграфа G, соответственно. Дугу, исходящую из вершины x и заходящую в вершину y, обозначим через xy.

Пусть $A, B\subseteq V(G)$ и $x\in V(G)$. Введем обозначения

$$E(A\to B)=\{yz\in E(G)/y\in A,\ z\in B\},$$

$$E(A, B)=E(A\to B)\cup E(B\to A),$$

$$I(x)=\{y\in V(G)/yx\in E(G)\},$$

$$O(x)=\{y\in V(G)/xy\in E(G)\}.$$

Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$. Если $H\subseteq V(G)$ и $A\to B$, $B\to H$, то будем писать $A\to B\to H$. Если же $A=\{x\}$, то вместо $\{x\}$ будем писать x.

Очевидно имеет место следующая.

Лемма. *Пусть G есть p-вершинный* ($p \geqslant 4$) *гамильтоновый орграф, не содержащий неполный гамильтоновый контур. Если $C_p = x_1 x_2 \ldots x_p x_1$ — гамильтоновый контур в G и $x_k x_1 \in E(G)$, где $3 \leqslant k \leqslant p-1$, то для любого i, $k \leqslant i \leqslant p-1$, имеет место*

$$|E(x_i \to x_2)| + |E(x_{k-1} \to x_{i+1})| \leqslant 1.$$

Теорема. *Пусть G есть p-вершинный* ($p \geqslant 12$) *направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими* $[(p-2)/2]$. *Тогда G содержит неполный гамильтоновый контур.*

Здесь приведем лишь схему доказательства теоремы.

Предположим, что G не содержит неполный гамильтоновый контур. Известно ([8]), что G содержит контур длины $p-1$. Пусть $C_{p-1} = y_1 y_2 \ldots y_{p-1} y_1$ — контур длины $p-1$ в G и вершина y не принадлежит этому контуру. Легко заметить, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, имеет место $y_i y$, $yy_{i+1} \in E(G)$. Следовательно, G содержит такой гамильтоновый контур $C_p = x_1 x_2 \ldots x_p x_1$, что для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, имеет место $x_{j-1} x_{j+1} \in E(G)$. Пусть для определенности $j = 1$, т. е. $x_p x_2 \in E(G)$. Очевидно, что $x_1 x_3 \overline{\in} E(G)$ и $x_{p-1} x_1 \overline{\in} E(G)$.

Сначала для орграфа G и контура C_p доказываются утверждения 1—7.

1. $x_p x_3 \overline{\in} E(G)$ *и* $x_{p-1} x_2 \overline{\in} E(G)$.

2. *Если* $x_3 x_p \in E(G)$, *то для всех* $i \in [4, p-2]$ *имеет место*

$$|E(x_i \to x_2)| + |E(x_3 \to x_{i+1})| \leqslant 1.$$

3. $E(x_1, \{x_3, x_{p-1}\}) \neq \varnothing$.

4. *Если* $x_1 x_{p-1} \in E(G)$, $E(x_3, x_p) = \varnothing$ *и* $x_{p-2} x_p \overline{\in} E(G)$, *то для* $n = [p/2]$ *и для некоторого k, где $k \geqslant 4$ и $k + n \leqslant p$, имеют место*

$$I(x_p) = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-3}, x_{p-1}\},$$

$$E(x_1 \to \{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+n-2}\}) \neq \varnothing.$$

5. *Если* $x_1 x_{p-1} \in E(G)$ *и* $E(x_p, x_3) = \varnothing$, *то* $x_{p-1} x_2 \overline{\in} E(G)$.

6. $E(x_1, x_3) \neq \varnothing$ *и* $E(x_1, x_{p-1}) \neq \varnothing$.

7. $E(x_3, x_p) = E(x_2, x_{p-1}) = \varnothing$.

Из утверждений 6 и 7 имеем, что $x_3 x_1$, $x_1 x_{p-1} \in E(G)$ и

$$E(x_3, x_p) = E(x_2, x_{p-1}) = \varnothing.$$

Отсюда и из утверждения 5 вытекает, что возможен только случай $x_3 x_{p-1} \in E(G)$ или случай $E(x_3, x_{p-1}) = \varnothing$.

Случай. $x_3 x_{p-1} \in E(G)$.

В этом случае сначала доказываются соотношения $x_{p-2} x_p \overline{\in} E(G)$ и $x_3 x_4 \overline{\in} E(G)$.

Отсюда с помощью утверждения 4 получим, что

$$I(x_p) = \{x_{p-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-3}\},$$

где $k \geqslant 4$ и $k + n \leqslant p$. Значит по лемме,

$$E(x_2 \to \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n-2}, x_1, x_4, x_{p-1}, x_p\}) = \varnothing,$$

т. е. $od(x_2) \leqslant n-2$, что является противоречием.

Случай. $E(x_3, x_{p-1}) = \varnothing$.

Из $E(x_3, \{x_p, x_{p-1}\}) = \varnothing$ вытекает, что для всех $i \notin \{p, p-1\}$ имеет место $E(x_3, x_i) \neq \varnothing$. Отсюда с помощью утверждения 7 получим, что $x_5 x_3 \in E(G)$. Значит, для некоторого i, $5 \leqslant i \leqslant p-3$ имеет место $x_i x_3$, $x_3 x_{i+1} \in E(G)$. Поэтому $x_4 x_2 \notin E(G)$, т. е. $x_2 x_4 \in E(G)$ или $E(x_2, x_4) = \varnothing$.

Предположим, что $x_2 x_4 \in E(G)$. Тогда

$$\{x_5, x_7, \dots, x_{p-2}\} \to x_3 \to \{x_4, x_6, \dots, x_{p-3}\}.$$

Учитывая рассмотренный случай $x_3 x_{p-1} \in E(G)$ и утверждение 7, можем считать, что

$$E(x_1, \{x_4, x_5\}) = E(x_2, x_3) = \varnothing.$$

Поэтому, пользуясь леммой, получим

$$\{x_7, x_9, \dots, x_{p-2}\} \to x_1 \to \{x_6, x_8, \dots, x_{p-1}\},$$

$$\{x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{p-2}\} \to x_2 \to \{x_6, x_7, \dots, x_{n+2}\}.$$

Отсюда легко заметить, что $E(x_4, x_p) = \varnothing$. Следовательно, так как $E(x_1, x_4) = \varnothing$, то $x_4 x_6 \in E(G)$. Значит, по утверждению 7, $E(x_4, x_7) = \varnothing$. Итак, получили, что вершина x_4 несмежна с вершинами x_1, x_7, x_p, а это невозможно.

Теперь предположим, что $E(x_2, x_4) = \varnothing$. Можем считать, что $E(x_p, x_{p-2}) = \varnothing$. Из $E(x_2, \{x_4, x_{p-1}\}) = \varnothing$ вытекает, что

$$\{x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{p-2}\} \to x_2 \to \{x_5, x_6, \dots, x_{n+2}\}.$$

Из $E(x_3, \{x_{p-1}, x_p\}) = \varnothing$ следует, что $x_4 x_6 \notin E(G)$, а из $x_5 x_3$, $x_2 x_5 \in E(G)$ с помощью леммы получим, что $E(x_4, x_6) = \varnothing$ и $x_1 x_4 \in E(G)$. В результате имеем контур $C_{p-1} = x_1 x_4 x_5 \dots x_i x_3 x_{i+1} \dots x_p x_1$, где $5 \leqslant i \leqslant p-3$. Если $i \geqslant 6$, то $x_2 \to \{x_5, x_6\}$, а если $i = 5$, то $x_2 \to \{x_3, x_5\}$. Следовательно, G содержит неполный гамильтоновый контур, а это противоречит нашему предположению.

Следующий пример орграфа G показывает, что при $p = 9$ утверждение теоремы не верно.

Пусть G есть 9-вершинный орграф с множеством вершин $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где $|V_i| = 3$ и $E(\langle V_i \rangle) = \varnothing$, и $xy \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $x \in V_i$ и $y \in V_{(i+1) \bmod 3}$.

Очевидно, что G удовлетворяет условию теоремы и не содержит неполный гамильтоновый контур.

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении
и Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Ուղղորդված գրաֆների բերի համիլտոնյան ցիկլերի մասին

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ. Դիցուք G-ն կամայական p-գագաթանի ($p \geqslant 12$) ուղղորդված գրաֆ է, որի մինիմալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $[(p-2)/2]$ թվից: Ապա G-ն պարունակում է բերի համիլտոնյան ցիկլ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари.* Теория графов, Мир. М., 1973. [2] *A. Benhocine.* Journal of Graph Theory, v. 8, № 1 (1984). [3] *A. Ghouila-Houri,* C. R. Acad. Sci., Paris, v. 25 (1960). [4] *D. R. Woodall.* Proc. London Math. Soc., v. 14 (1972). [5] *С. Х. Дарбинян,* Тезисы докладов V-ой науч.-техн. конф. молодых ученых и специалистов района 26 комиссаров г. Еревана, Ереван, 1986. [6] *H. Meyniel.* Journal Combinatorial Theory, Ser. B, v. 14 (1973). [7] *С. Х. Дарбинян.* ДАН АрмССР, т. 84, № 2 (1987). [8] *С. Х. Дарбинян,* Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники, Ереван, № 14 (1985).