ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Д. Г. Багдасарян, член-корреспондент АН Армении В. С. Захарян

О касательном предельном поведении произведения $B_\alpha(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено 21/VI 1991)

1. Рассмотрим произведение Бляшке

$$B(z, a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z, a_n),$$

где

$$b(z, a) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{|a|}{a}, \quad 0 < |a| < 1.$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < +\infty. \tag{1}$$

Функция $B(z, a_{n_k})$ называется подпроизведением для произведения $B(z, a_n)$, если $\{a_{n_k}\}$ подпоследовательность для $\{a_n\}$.

Известно, что при условии (1) произведение Бляшке имеет радиальные предельные значения

$$B(e^{i\theta}, a_n) = \lim_{r \to 1-0} B(re^{i\theta}, a_n) \tag{2}$$

с модулем единица для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ кроме, возможно, некоторого исключительного множества $E \in [0, 2\pi]$ линейной меры нуль. При этом в точках, где существуют радиальные граничные значения, будут существовать и угловые пределы ([1]).

Вопрос о том, что дополнительно можно утверждать об исключительном множестве E, где не имеет место соотношение (2), когда последовательность $\{a_n\}$ подчинена более сильному, чем (1), условию,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{\alpha} < +\infty \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{2}$$

впервые был исследован Фростманом.

С целью формулировки полученного им результата приведем известное определение φ-емкости множества.

Множество E, измеряемое по Борелю, имеет положительную γ-емкость $(0<\gamma<1)$, если найдется такая мера μ, которая сосредоточена на E, т. е. $\mu(E)=1$, для которой функция

$$V_{\gamma}(x, r)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{|e^{it}-e^{ix}|^{\gamma}} \tag{4}$$

остается равномерно-ограниченной по x при $r\to 1-0$.

В этом случае обозначают $\mathrm{Cap}_{\gamma}(E)>0$. В противном случае E имеет емкость, равную нулю $\mathrm{Cap}_{\gamma}(E)=0$.

Отметим следующее: если $\mathrm{Cap}_{\gamma}(E_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots, p)$, то

$$\mathrm{Cap}_{\gamma}\left\{\bigcup_{1}^{p}E_k\right\}=\mathrm{Cap}_{\gamma}\left\{\bigcap_{1}^{p}E_k\right\}=0.$$

Результат Фростмана утверждает, что при условии (3) исключительное множество E для соотношения (2) имеет γ-емкость нуль.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о касательных пределах для произведения Бляшке. Приведем известное определение касательного предела.

Пусть имеем множество точек z:

$$R(m, \theta, \gamma)=\{z\colon 1-|z|\geqslant m\,|\arg z-\theta|^{\gamma},\ 0<|z|<1\}, \tag{5}$$

где за $|\arg z-\theta|$ принимаем меньшую из дуг на $C=\{z:|z|=1\}$ между $\dfrac{z}{|z|}$ и $e^{i\theta}$.

Пусть функция $f(z)$ определена на $D=\{z:|z|<1\}$. Если существует такое L, что для каждого $m\,(m>0)$ $f(z)\to L$ при $z\to e^{i\theta}$ и $z\in R(m, \theta, \gamma)$, то говорят, что $f(z)$ имеет T_{γ}-предел в точке $e^{i\theta}$.

Очевидно, что T_1-предел существует в том и только в том случае, когда существует классический угловой предел. При $\gamma>1$ положение меняется. В работе [2] показано, что для каждого $\gamma(\gamma>1)$ существует произведение Бляшке, для которого не существует T_{γ}-предела нигде на C.

Г. Карго [3] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Если нули функции $B(z, a_n)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{\alpha}<+\infty \qquad (0<\alpha<1),$$

то для любого γ $\left(1\leqslant\gamma<\dfrac{1}{\alpha}\right)$ существует множество E_{γ}, $\mathrm{Cap}_{\alpha\gamma}(E)=0$, для которого произведение $B(z, a_n)$ и все его подпроизведения имеют T_{γ}-предел, модуль которого равен единице в каждой точке $C-E_{\gamma}$.

Можно доказать теорему, аналогичную теореме А: в частном случае, при $\beta = 1$, эта теорема совпадает с теоремой А.

Теорема 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{\alpha} < +\infty \qquad (0<\alpha<1),$$

то для любого β, которое удовлетворяет условию $\alpha<\beta\leq 1$, и любого γ, $\beta<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$, существует такое множество E, $\mathrm{Cap}_{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}(E)=0$, для которого произведение Бляшке $B(z, a_n)$ и любое его подпроизведение имеют $T_{\frac{\gamma}{\beta}}$-предел, модуль которого равен единице, в каждой точке $C-E$.

В процессе доказательства теоремы 1 использованы теорема А и тот факт, что в случае, если имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|}{|e^{i\theta}-a_n|^{\frac{\gamma}{\beta}}}<+\infty,$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение $B(z, a_n)$ и все его подпроизведения имеют T_γ-предел.

Из теоремы 1 видно, что множество E, где $B(z, a_n)$ не имеет $T_{\frac{\gamma}{\beta}}$-предела, получается наиболее редко при $\beta = 1$. Это доказано в работе Карго ([3]) иным путем.

2. Развивая общую теорию факторизации мероморфных функций в единичном круге, М. М. Джрбашян ([4]) ввел в рассмотрение произведение $B_\alpha(z, z_n)$, которое в частном случае, при $\alpha = 0$, совпадает с произведением Бляшке.

Для сходимости произведения $B_\alpha(z, z_n)$ необходимо и достаточно, чтобы нули $\{z_n\}_1^{\infty}$ функции $B_\alpha(z, z_n)$ удовлетворяли условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}<+\infty.$$

Отметим два свойства теоремы Б и В (см. соответственно ([5, 6])) произведения $B_\alpha(z, z_n)$, которые мы используем в дальнейших доказательствах.

Теорема Б. *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}<+\infty \qquad (-1<\alpha<0)$$

имеет место представление

$$B_\alpha(z, z_n)=B_0(z, z_n)\exp\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{2}{(1-ze^{-i\theta})^{1+\alpha}}-1\right\}d\psi(\theta). \qquad (6)$$

где $\psi(\theta)$ — *некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации* $[-\pi, \pi]$.

Теорема В. *При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\alpha}<+\infty \qquad (0<\alpha<\infty)$$

имеет место представление

$$B_{\alpha}(z, z_n)=B_{\alpha=1}(z, z_n)\exp\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\int_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_n z}{x}\right)^{\alpha}}dx-\frac{(1-|z_n|)^{\alpha}}{\alpha}\right\} \qquad (7)$$

Целью настоящей работы является: доказать верность результатов теоремы А и для произведения $B_{\alpha}(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна при $-1<\alpha<1$.

Докажем следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и*

$$E_{\alpha}=\left\{e^{ix}:\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-e^{i(x-\theta)}|^{\alpha}}=+\infty\right\}, \qquad (8)$$

где $\psi(\theta)$ — *неубывающая функция конечной вариации на* $[-\pi, \pi]$. *Тогда* $\mathrm{Cap}_{\alpha}(E_{\alpha})=0$.

Доказательство. Ясно, что в случае $e^{ix}\in E_{\alpha}$

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-re^{i(x-\theta)}|^{\alpha}}=+\infty.$$

Следовательно, для любого $M>0$ и любого $x: e^{ix}\in E_{\alpha}$ существует $r(x, M)$ $(r(x, M)<1)$, при котором

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-r(x, M)e^{i(x-\theta)}|^{\alpha}}>M. \qquad (9)$$

Предположим, что $\mathrm{Cap}_{\alpha}(E_{\alpha})>0$. Тогда существует такая мера μ, при которой $\mu(E_{\alpha})=1$ и

$$V_{\alpha}(x, r)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{|1-re^{i(x-\theta)}|^{\alpha}}$$

остается равномерно ограниченным по $x\in[-\pi, \pi]$ при $r\to 1-0$.

В частном случае, при $r=r(x, M)$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{|1-r(x, M)e^{i(x-\theta)}|^{\alpha}}<+\infty. \qquad e^{ix}\in E_{\alpha}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{E_a}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-r(x,\,M)\,e^{i(x-\theta)}|^{a}}\right\}d\mu=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_{E_a}\frac{d\mu}{|1-r(x,\,M)\,e^{i(x-\theta)}|^{a}}\right\}d\psi(\theta)\leqslant C\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)<C_1.$$

Это неравенство противоречит тому, что для любого $M>0$ на E_a имеет место неравенство (9).

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 1.

Лемма 2. *Пусть γ любое число из $1<\gamma<\frac{1}{a}$, $e^{ix}\,\overline{\in}\,E_{a\gamma}$, где*

$$F_{a\gamma}=\left\{e^{ix}:\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\theta)}{|1-e^{i(x-\theta)}|^{a\gamma}}=+\infty\right\},$$

$\psi(\theta)$ *— неубывающая функция конечной вариации на* $[-\pi,\,\pi]$. *Тогда*

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{d\psi(\theta)}{|1-ze^{-i\theta}|^{a}}=0. \qquad (10)$$

Доказательство. При r достаточно близких к 1, имеем

$$|e^{i\theta}-z|\geqslant 1-r,$$

$$|e^{i\theta}-z|=|e^{i\theta}-e^{ix}+e^{ix}-z|\geqslant|e^{i\theta}-e^{ix}|-(1-r).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$|e^{i\theta}-z|\geqslant\frac{1}{2}|e^{i\theta}-e^{ix}|\geqslant K|e^{i\theta}-e^{ix}|^{\gamma},$$

где $K>0$.

Следовательно,

$$\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{d\psi(\theta)}{|1-ze^{-i\theta}|^{a}}\leqslant K^{-a}\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta}-e^{ix}|^{a\gamma}}. \qquad (11)$$

Из (11) ясно, что для выполнения (10) достаточно доказать

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{-\pi-a}^{\pi+a}\left\{\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta}-e^{ix}|^{a\gamma}}\right\}dx=0.$$

Имеем при $e^{ix}\,\overline{\in}\,E_{a\gamma}$

$$\int\limits_{-\pi-a}^{\pi+a}\left\{\int\limits_{x-a}^{x+a}\frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta}-e^{ix}|^{a\gamma}}\right\}dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_{\theta-a}^{\theta+a}\frac{dx}{|e^{i\theta}-e^{ix}|^{a\gamma}}\right\}d\psi(\theta).$$

Но при $x \in [\theta - a, \theta + a]$ имеем

$$|e^{i\theta} - e^{ix}|^2 = 2 - 2\cos(\theta - x) \geqslant \frac{4}{\pi^2} |\theta - x|^2.$$

Таким образом

$$\int_{-\pi-a}^{\pi+a} \left\{ \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{\alpha\gamma}} \right\} dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{\theta-a}^{\theta+a} \frac{dx}{\left(\frac{2}{\pi}|\theta - x|\right)^{\alpha\gamma}} \right\} d\psi(\theta) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} \right\} d\psi(\theta).$$

последнее выражение стремится к нулю при $a \to 0$.

Теперь докажем следующие теоремы о касательном предельном поведении $B_\alpha(z, z_n)$ при $-1 < \alpha < 0$ и при $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{z_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha+1} < \infty, \qquad -1 < \alpha < 0.$$

Тогда произведение $B_\alpha(z, z_n)$ *М. М. Джрбашяна и любое его подпроизведение имеет* T_γ*-предел для любого* γ $\left(1 \leqslant \gamma < \frac{1}{\alpha+1}\right)$ *кроме, возможно, множества* E, *для которого* $\mathrm{Cap}_{\gamma(\alpha+1)}(E) = 0$.

Доказательство. Из теоремы А и Б ясно, что достаточно доказать вышеуказанное утверждение для функции

$$K_\alpha(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{(1 - ze^{-i\theta})^{\alpha+1}},$$

и теорема будет доказана.

Пусть $e^{ix} \notin E_{\gamma(\alpha+1)}$. Тогда напишем

$$K_\alpha(z) = K_\alpha^{(1)}(z) + K_\alpha^{(2)}(z) + K_\alpha^{(3)}(z),$$

где интегрирование распространяется соответственно на отрезки

$$[-\pi, x - a], \quad [x + a, \pi] \text{ и } [x - a, x + a].$$

Так как первые два слагаемых аналитические функции в окрестности e^{ix}, а третье при $e^{ix} \notin E_{\gamma(\alpha+1)}$ по лемме 2 стремится к нулю и $\mathrm{Cap}_{\gamma(\alpha+1)}(E_{\gamma(\alpha+1)}) = 0$, то теорема доказана.

Теорема 3. *Если последовательность* $\{z_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^\alpha < +\infty \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{13}$$

то произведение $B_\alpha(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна при $0 < \alpha < 1$ и каждое его подпроизведение имеет T_γ-предел для любого γ $\left(0 < \gamma < \frac{1}{\alpha}\right)$ кроме, возможно, множества E, для которого $\mathrm{Cap}_{\alpha\gamma}(E) = 0$.

Доказательство. При условии (13) имеет место представление (7).

В работе ([8]) доказано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_n}{x} z\right)^{\alpha}} dx$$

равномерно сходится в окрестности каждой точки $e^{i\theta}$ кроме точек $e^{i\theta} \in E$, для которых $\mathrm{Cap}_\alpha(E) = 0$. Так как для любого γ $\left(1 \leq \gamma < \frac{1}{\alpha}\right)$ из $\mathrm{Cap}_\alpha(E) = 0$ следует, что $\mathrm{Cap}_{\alpha\gamma}(E) = 0$, то по теореме 2 получается доказательство и для $B_\alpha(z, z_n)$ при $0 < \alpha < 1$.

Ереванский политехнический институт

Դ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ թղթակից անդամ Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի $B_\alpha(z, z_n)$ արտադրյալի շոշափողային սահմանային վարքագծի մասին

Նշանակենք $R(m, \theta, \gamma) = \{z : 1 - |z| \geq m |\arg z - \theta|^\gamma, \ 0 < |z| < 1\}$, *որտեղ որպես* $|\arg z - \theta|$ *ընդունված է* $\frac{z}{|z|}$ *և* $e^{i\theta}$*-ն միացնող միավոր շրջանի փոքր աղեղը։*

Թող $f(z)$ ֆունկցիան որոշված լինի $D = \{z, |z| < 1\}$-ում։ Եթե գոյություն ունի այնպիսի L, որ կամայական $m > 0$ համար $f(z) \to L$, երբ $z \to e^{i\theta}$ և $z \in R(m, \theta, \gamma)$, ապա կասենք, որ $f(z)$ ֆունկցիան $e^{i\theta}$-կետում ունի T_γ-սահման։

Հոդվածում, օգտագործելով Բլյաշկեի $B(z)$ արտադրյալի համապատասխան հատկությունները, ապացուցված են հետևյալ թեորեմները Մ. Մ. Ջրբաշյանի $B_\alpha(z, z_n)$ արտադրյալների համար, երբ $-1 < \alpha < 1$։

Թեորեմ 1. Եթե

$$\sum (1 - |z_n|)^{1+\alpha} < +\infty, \qquad (-1 < \alpha < 0),$$

ապա՝ $B_\alpha(z, z_n)$ արտադրյալը և նրա ցանկացած ենթաարտադրյալը ունեն T_γ-սահման $\left(1 \leq \gamma < \frac{1}{\alpha+1}\right)$, բացի գուցե մի E բազմությունից, որի համար $\mathrm{Cap}_{\gamma(\alpha+1)}(E) = 0$։

Թեորեմ 2. Եթե

$$\sum(1-|z_n|)^{\alpha}<+\infty, \qquad 0<\alpha<1.$$

ապա՝ $B_\alpha(z, z_n)$-ը և նրա ցանկացած $B_\alpha(z, z_{n_k})$ ենթաարտադրյալը ունեն T_γ-սահման, բացի զույգ մի E բազմությունից, որի համար $\mathrm{Cap}_{\gamma\alpha}(E)=0$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950. [2] *A. J. Lohwater, G. Piranian.* Ann. Acad. Sci Fenn. Ser. A. J., v. 239 (1957). [3] *G. T. GarGo,* Canadian Journal of mathematics, v. 14, № 2, p. 334—348 (1962). [4] *М. М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука М., 1966. [5] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян,* Мат. заметки, т. 4. № 1, с. 3—10 (1968). [6] *Д. Т. Багдасарян. И. В. Оганесян,* ДАН Арм ССР. т. 90, № 5, с. 199—205 (1990).