УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян

О гильбертовых K_0 -окрестностных ретрактах

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 17/VII 1991)

В статье вводятся понятия гильбертова K_0 -ретракта и K_0 -окрестностного ретракта, являющихся специальными подмножествами вещественного гильбертова пространства H . Существуют свойства евклидовых ретрактов и окрестностных ретрактов, которые перестают быть справедливыми в бесконечномерном случае (в частности, в гильбертовом пространстве) в классе всех непрерывных отображений. Вместе с тем оказывается, что ряд таких свойств остаются справедливыми и в вещественном гильбертовом пространстве H , если, однако, рассматривать только так называемые K_0 -отображения, принадлежащие одному специальному классу K_0 непрерывных отображений подмножеств пространства H . В работе приведены бесконечномерные аналоги ряда таких свойств.

Определение и некоторые основные свойства класса K_0 содержатся в (1-3).

Определение 1. Ретракт A множества $X \subset H$ называется K_0 -ретрактом для X , если существует ретракция $r: X \rightarrow A$, являющаяся K_0 -отображением, соответственно множества $A \subset X$ — K_0 -окрестностным ретрактом для X , если A является K_0 -ретрактом для некоторого открытого в X множества $U \supset A$.

Ниже ретракции, являющиеся K_0 -отображениями, будем называть K_0 -ретракциями.

Определение 2. Семейство K_0 -отображений $f_t: X \rightarrow Y$ называется K_0 -гомотопией, если определенное формулой $F(t, x) = f_t(x)$ отображение F цилиндра $I \times X$ в Y является K_0 -отображением в гильбертовом пространстве $H^* = \mathbb{R} \times H$.

Как известно, в классе всех непрерывных отображений единичная сфера S пространства H является ретрактом для единичного замкнутого шара B пространства H . Однако с помощью бесконечномерных гомотопических групп (4) установлено (5), что в классе K_0 -отображений сферы S не является ретрактом для B , т. е. S не является

K_0 -ретрактом для B , стало быть, и для H . Этот факт играет основную роль при доказательстве приводимых ниже предложений. Отметим также, что S является K_0 -окрестностным ретрактом как для B , так и для H , ибо отображение $x \rightarrow \frac{x}{|x|}$ является K_0 -ретракцией $H \setminus \{0\}$ на S .

Предложение 1. Пусть F — замкнутое подмножество в H , а G — одна из ограниченных компонент дополнения $H \setminus F$. Тогда не существует K_0 -отображения $f: \bar{G} \rightarrow F$ такого, что $f(x) = x$ для всякой точки $x \in \bar{G} \setminus G$.

Предложение 2. Пусть G — непустое открытое ограниченное подмножество пространства H . Тогда множество $F = H \setminus G$ не является K_0 -ретрактом для H .

Предложение 3. Пусть F — замкнутое и ограниченное подмножество пространства H , являющееся K_0 -ретрактом для H . Тогда множество $G = H \setminus F$ связно.

Предложение 4. Пусть замкнутое, ограниченное множество F есть K_0 -окрестностный ретракт H и удовлетворяет условию: существует открытое в H множество $U \supset F$ такое, что F — K_0 -ретракт для U и число компонент для множества $H \setminus F$, содержащихся в $H \setminus U$, конечно. Тогда число компонент $H \setminus F$ конечно.

Предложение 5. Пусть X — K_0 -окрестностный ретракт пространства H и $H^* = R^n \times H$ — гильбертово пространство, являющееся декартовым произведением евклидова пространства R^n размерности $n \geq 0$ и пространства H . Тогда, если множество $X^* \subset H^*$ K_0 -гомеоморфно в H^* множеству X , то X^* является K_0 -окрестностным ретрактом для H^* .

Лемма Подмножество Y пространства H является K_0 -окрестностным ретрактом для H тогда и только тогда, когда для любых множеств $A \subset X \subset H$ всякое K_0 -отображение $f: A \rightarrow Y$ можно продолжить до K_0 -отображения $f^*: U \rightarrow Y$ некоторой окрестности U в X подмножества A .

Предложение 6. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X и $T = O \times X \cup I \times A$. Пусть, далее, Y — произвольный K_0 -окрестностный ретракт для H . Тогда всякое K_0 -отображение (в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$) $F: T \rightarrow Y$ может быть продолжено до K_0 -отображения $\tilde{F}: I \times X \rightarrow Y$.

Теорема 1. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X , и Y — K_0 -окрестностный ретракт для H . Пусть, далее, $f: X \rightarrow Y$ — K_0 -отображение, $g_1: A \rightarrow Y$ — частичная K_0 -гомотопия отображения f . Тогда гомотопию g_1 можно продолжить до K_0 -гомотопии $f_1: X \rightarrow Y$ отображения f .

Предложение 7. Пусть X — замкнутый K_0 -окрестностный ретракт в H . Тогда X будет K_0 -ретрактом в H в том и только том случае, когда X K_0 -стягиваемо по себе в точку.

Предложение 8. Пусть $A \subset X \subset N$, причем A замкнуто в X и $Y - K_0$ -окрестностный ретракт в N . Пусть, далее, $f, g: X \rightarrow Y - K_0$ -отображения, а $\varphi_1: A \rightarrow Y - K_0$ -гомотопия, связывающая $f|_A$ с $g|_A$. Тогда существуют окрестность V в X подмножества A и K_0 -гомотопия $\tilde{\varphi}_1: V \rightarrow Y$, связывающая $f|_V$ и $g|_V$ и являющаяся продолжением на V гомотопии φ_1 .

Теорема 2. Пусть $A \subset X \subset N$, причем A замкнуто в X . Пусть, далее, $Y - K_0$ -ретракт в N , тогда всякое K_0 -отображение $f: A \rightarrow Y$ может быть продолжено до K_0 -отображения $\tilde{f}: X \rightarrow Y$.

Следствие 1. Пусть $Y - K_0$ -окрестностный ретракт для N , а $f, g: X \rightarrow Y - K_0$ -отображения произвольного подмножества пространства N . Предположим, далее, что на некотором (не обязательно замкнутом) подмножестве $A \subset X$ отображения f и g совпадают. Тогда существуют открытая окрестность V множества A в X и K_0 -гомотопия $\tilde{\varphi}_1: V \rightarrow Y$ такая, что $\tilde{\varphi}_1: f|_V \simeq g|_V$ (rel A).

Предложение 9. Пусть замкнутое подмножество пространства представимо в виде $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, где каждое из X_i является открытым в X подмножеством и является K_0 -окрестностным ретрактом для N . Тогда и само X является K_0 -окрестностным ретрактом для N .

Предложение 10. Пусть Y — компактное подмножество пространства N , являющееся ее K_0 -окрестностным ретрактом. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого подмножества $X \subset N$ любые два K_0 -отображения $f, g: X \rightarrow Y$, удовлетворяющие условию $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$, K_0 -гомотопны между собой, причем эта гомотопия является неподвижной на подмножестве $A \subset X$, на котором эти отображения совпадают.

Предложение 11. Если локально компактное множество $X \subset N$ является K_0 -окрестностным ретрактом для N , то X — конечномерно ($\dim X < \infty$).

Следствие 2. Гильбертов куб Q не является K_0 -окрестностным ретрактом для N .

Замечание. Аналогичным образом определяются понятия K_1 -деформационного ретракта и K_0 -окрестностного деформационного ретракта и устанавливаются бесконечномерные аналоги некоторых соответствующих свойств конечномерного случая.

Հիլբերտյան K_0 -զրգակայնային սեւորակտների մասին

Գոյութիւն ունեն չվկլիդյան տարածութիւնում սեւորակտների և շրջակայքային սեւորակտների մի ամբողջ շարք կարևոր և հետաքրքիր հատկութիւններ, որոնք դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջ չափանի ֆունկցիոնալ տարածութիւններում քոյոր անընդհատ արտապատկերումների դասում:

Հոդվածում մտցված են հիլբերտյան K_0 -սեւորակտների և K_0 -շրջակայքային սեւորակտների գաղափարները: Դրանք իրական հիլբերտյան H տարածութիւնում այն սեւորակտներն են, որոնց դեպքում սեւորակցիաները պատկանում են H տարածութիւն ենթարազմութիւնների անընդհատ արտապատկերումների մի հատուկ K_0 դասի: Հոդվածում բերված են վերը նշված հատկութիւններից մի քանիսի անվերջ չափանի անալոզները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Փ Յ Ո Ւ Ն

- 1 В. Г. Болтянский ДАН Арм.ССР. т. 51, № 3 (1970) 2 Э. А. Мирзаханян, ДАН АрмССР. т. 51. № 5 (1970). 3 Э. А. Мирзаханян, ДАН АрмССР т. 79, № 1 (1984). 4 Э. А. Мирзаханян, Уч. зап. ЕГУ, № 3, 1990. 5 Э. А. Мирзаханян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1991.