

УДК 519.8

А. Д. Туниев

Метод направляющего вектора в линейном программировании

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшановым 29/V 1991)

В работе предлагается идея в преобразовании Гаусса выбирать не один элемент, а одновременно несколько элементов — направляющий вектор. Эта идея позволяет обобщить метод исключения и на его основе развить симплекс-метод Дж. Б. Данцига ^(1,2), его модифицированный вариант — метод обратной матрицы ⁽²⁾ и двойственный симплекс-метод Г. Е. Лемке ⁽⁵⁾.

Суть развития заключается в том, что на каждом шаге выбирается не один особый элемент, а одновременно несколько элементов — особый направляющий вектор, который позволяет после шага обобщенного метода полного исключения (жорданового исключения) перейти к улучшенному плану. Так как улучшенные планы в рассматриваемом смысле единственны, то этим гарантируется конечность предлагаемых методов.

Отметим, что данный подход позволяет предложить эффективные методы для решения некоторых классов задач. В частности, в вопросах управления запасами, надежности и т. д. существуют задачи, которые формализуются как задачи марковского процесса принятия решений. В рамках линейного программирования они имеют специальную структуру матрицы. Последнее позволяет при выборе особого направляющего вектора соответствующей длины предложить эффективный метод решения этих задач.

Кроме того, такой подход является естественным с точки зрения многопроцессорных вычислительных комплексов.

Обозначения. Здесь удобно использовать обозначения, предложенные И. В. Романовским ⁽⁶⁾. Приведем необходимые из них: $x[N]$ — вектор $x = \{x_i\}$, где i пробегает конечное множество N ; $x[K]$ — соответствующий K -й „кусоч“ вектора, если $K \subset N$; $x[i]$ — компонента вектора, имеющая индекс i ; $z[i, N]$ — i -я строка матрицы $z[M, N] = \{z_{ij}\}$, $i \in M$, $j \in N$, а $z[M, j]$ — ее j -й столбец.

$z[K, I]$ — подматрица матрицы $z[M, N]$, где $K \subseteq M$, $I \subseteq N$. Здесь мы не будем выделять векторы строк и столбцов.

1. Теоретическая основа метода. 1.1. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0] \quad (1)$$

относительно неизвестного вектора-столбца $x[N]$.

Пусть $K \subseteq N$ и при некотором $i_0 \in M$ норма $\|a[i_0, K]\| \neq 0$. Обозначим $N' = \{0, 1, \dots, n\}$ и положим

$$a'[i, N'] = \begin{cases} \frac{a[i, N']}{\|a[i_0, K]\|}, & i = i_0, \\ a[i, N'] + a_i a'[i_0, N'], & i \neq i_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_i = a_i(K) = -a[i, K]a'[i_0, K]$, $i \in M \setminus i_0$.

Теперь составим новую систему

$$a'[i, K]y[K] + a'[i, N \setminus K]x[N \setminus K] = a'[i, 0], \quad i \in M \setminus i_0, \quad (3)$$

где $y[K]$ — неизвестный вектор-столбец.

Теорема 1. Если $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ — произвольное решение системы (1), то $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ — решение системы (3), где

$$y[K] = x[K] + \lambda a'[i_0, K], \quad \lambda \in R^1.$$

И наоборот, если $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ — произвольное решение системы (3), то $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ — решение системы (1), где

$$x[K] = y[K] + (a'[i_0, 0] - a'[i_0, K]y[K] - a'[i_0, N \setminus K]x[N \setminus K])a'[i_0, K]. \quad (4)$$

Следствие. Пусть $M_0 \subseteq M$ и $i_0 \in M_0$. Тогда система (1) и система

$$\begin{cases} a'[i, N]x[N] = a'[i, 0], & i \in M_0, \\ a[i, N]x[N] = a[i, 0], & i \in N \setminus M_0, \end{cases}$$

эквивалентны в смысле множества решений.

Замечание 1. Преобразование (2) совпадает с преобразованием Гаусса, если K — одноэлементное множество, и с преобразованием Грамма—Шмидта, если $K = N'$.

1.2. Используя линейное параметрическое преобразование (2), можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $a[M, N]$ — матрица полного ранга. Тогда существует такое

$$K = \{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}\}, \quad K_i \subseteq N, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad N = \bigcup_{i=1}^{m-1} K_i,$$

что

$$a[M, N] = I_m[M, M]a_K[M, N], \quad (5)$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле, т. е. при $K = \{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}\}$, единственное.

Здесь $I_K [M, M]$ — нижняя треугольная матрица, диагональные элементы которой равны единице, а $u_K [M, N']$ — прямоугольная матрица, соответствующие „куски“ строк которой удовлетворяют условию

$$u[i, K_s] u[s, K_s] = 0, \quad i > s \quad (i = 2, 3, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, m-1).$$

Отметим, что при $N=M$ разложение (5) в двух крайних случаях совпадает, соответственно, с LU -разложением (когда все K_i — одноэлементные множества) и с ортогональным разложением (когда все $K_i = N$).

Разложение (5), которое естественно назвать частично-ортогональным, является основой для дальнейшего развития группы методов исключения (1,8) и исследования их ошибок округления.

2. *Обобщение методов исключения.* 2.1. Пусть система (1) ранга r разрешима и первые ее r строк линейно-независимы. Обозначим $R = \{1, 2, \dots, r\}$. Сущность обобщенного метода полного исключения заключается в следующем.

1. Последовательно для $s = 1, 2, \dots, r$ выбираем $K_s \subseteq N$ такое, что $\|a^{s-1}[s, K_s]\| \neq 0$, и полагаем ($a^0 [M, N'] = a [M, N']$)

$$a^s [i, N'] = \begin{cases} \frac{a^{s-1}[i, N']}{\|a^{s-1}[s, K_s]\|}, & i = s, \\ a^{s-1}[i, N'] + \alpha_i a^s [s, N'], & i \neq s, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i, K_s] a^s [s, K_s], \quad i \neq s. \quad (7)$$

При этом на каждом s -ом шаге запоминаем „кусочек“ $a^s [s, K_s]$ вектора $a^s [s, N]$, $s = 1, 2, \dots, r$.

2. Тогда после r шагов получим систему вида

$$a^r [R, N] x [N] = a^r [R, 0]. \quad (8)$$

3. Пусть $K = \bigcup_{s \in R} K_s$. Формируем матрицу $b [R, K] = \|b [s, j]\|$, где элементы s -й строки имеют вид:

$$b [s, j] = \begin{cases} a^s [s, j], & j \in K_s, \\ 0, & j \in K \setminus K_s \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

4. Пусть $u [K, N'] = b^T [R, K] a^r [R, N']$. Сформируем систему

$$u [K, N] x [N] = u [K, 0],$$

которая эквивалентна системе (8).

При введенных предложениях справедлива

Теорема 3. Для произвольного $j \in N'$:

а) столбец $u [K, j]$ является собственным вектором подматрицы $u [K, K]$ с собственным значением $\lambda = 1$, т. е.

$$u [K, K] u [K, j] = u [K, j];$$

б) компоненты вектора $u[K, j]$ являются коэффициентами разложения j -го столбца матрицы $a[M, N']$ по столбцам матрицы $a[M, K]$, т. е.

$$a[M, K]u[K, j] = a[M, j],$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле, т. е. при $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$, является единственным.

Следствие 1. Если $K_1 = K_2 = \dots = K_r = N$, то $u[N, 0]$ ортогонально ядру матрицы $a[M, N]$, т. е. $u[N, 0]$ — нормальное решение системы (1).

Решение $u[K, 0]$ будем называть частично-нормальным.

2.2. Заменяя в (6) и (7) $i \neq s$ на $i > s$, через r шагов получим эквивалентную систему вида

$$a^s[s, N]x[N] = a^s[s, 0], \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

которую легко решить обратным ходом, если использовать (4). Другими словами, получаем обобщенную процедуру метода исключения Гаусса.

Неразрешимость системы определяется так же, как и в обычных методах исключения.

2.3. Пусть матричная система

$$a[M, N]x[N, M] = e[M, M],$$

где $e[M, M]$ — единичная матрица, неразрешима.

Рассмотрим нормально матричное уравнение

$$b[N, N]x[N, M] = a^T[M, N], \quad (9)$$

где $b[N, N] = a^T[M, N]a[M, N]$.

Пусть $K_s \subseteq N$, $s \in R$, $N' = \bigcup_{s \in R} K_s$. При $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ применим к системе (9) обобщенную процедуру жордановых исключений. Тогда после r шагов, в конечном итоге, получим систему вида

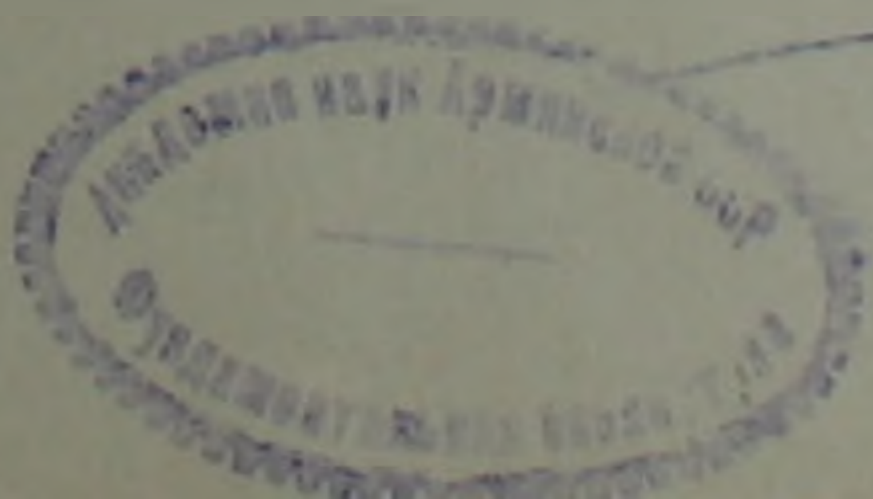
$$u[N, N]x[N, M] = \bar{u}[N, M].$$

При введенных предположениях справедлива

Теорема 4. Матрица $u[N, M]$ относительно $a[M, N]$ обладает первыми тремя свойствами псевдообратной матрицы Мура—Пенроуза (см. например [7, 11]), при этом в рассматриваемом смысле она единственная.

Следствие. Если $K_1 = K_2 = \dots = K_r = N$, то $u[N, M]$ — псевдообратная матрица Мура—Пенроуза, а $u[N, N]$ — матрица ортогонального проектирования.

При заданном разбиении $u[N, M]$ назовем частично-псевдообратной матрицей и частично-нормальной, если $a[M, N]$ матрица полного ранга.



3. Развитие симплексных методов. Полученные выше результаты являются алгебраической основой для дальнейшего развития признаков оптимальности опорного плана и симплексных методов.

3.1. Признаки оптимальности частично-нормального плана. Рассмотрим задачу линейного программирования. Максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N] \quad (10)$$

при условиях

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \quad (11)$$

$$x[N] \geq 0[N], \quad (12)$$

где $0[N]$ — нулевой вектор.

Утверждение 1. Пусть при $K = \bigcup_{s \in M} K_s$, $K_s \subseteq N$, $s \in M$, матрица $u[K, M]$ — частично-обратная относительно матрицы $a[M, K]$

и $u[K, 0] = u[K, M]a[M, 0] \geq 0[K]$, $(u[K, j])$ — коэффициенты разложения относительно псевдобазиса $\{a[M, j]\}$, $j \in K$. Тогда

а) расширение оценки относительно псевдобазиса $\{a[M, j]\}$ равно

$$\Delta[j] = c[K]u[K, j] - c[j] = u^T[K, M]c^T[K]a[M, j] - c[j], \quad j \in N;$$

б) если $\Delta[j] \geq 0$, $j \in N$, то $u[K, 0]$ — решение задачи (10)–(12),

а $\lambda[M] = u^T[K, M]c^T[K]$ — решение двойственной к ней задачи.

Справедливость этого утверждения следует из критерия оптимальности Л. В. Канторовича (12).

3.2. Рассмотрим расширенный вариант симплекс-метода*. Пусть задача (10)–(12) невырожденная, $x^0[M, N'] = a[M, N']$, $x^0[M, M] = e[M, M]$ — единичная матрица, $x^0[0, j] = \Delta[j]$, $j \in N'$ — оценки относительно базиса $\{a[M, j]\}_{j \in M}$, $x^0[M, 0]$ — опорный план. Кроме того сформируем матрицу $b^0[M, N]$, у которой подматрица $b^0[M, M] = x^0[M, M]$, т. е. единичная, а $b^0[M, N \setminus M] = 0[M, N \setminus M]$, т. е. нулевая. Теперь опишем переход от s -го шага к $s+1$, где $s = 0, 1, 2, \dots, s$. Пусть на s -м шаге получена система

$$\begin{cases} x^s[0, N]x[N] = x^s[0, 0], \\ x^s[M, N]x[N] = x^s[M, 0] \end{cases} \quad (13)$$

и матрица $b^s[M, N]$, где $x^s[0, N'] = [x^s[0, 0], x^s[0, N']]$ — вектор расширенных оценок.

1. Выберем $\bar{K}_{s+1} \subseteq N$ так, чтобы $x^s[0, j] < 0$, $j \in \bar{K}_{s+1}$.

* Этот метод является одной из версий процедуры (13), когда каждая итерация состоит только из одного шага. Предложен совместно с А. С. Тупиным.

2. Пусть $x^s [i, 0] > 0$, $i \in M$. Определяем

$$\theta_i = \frac{x^s [f, 0]}{|x^s [f, \bar{K}_i]|} = \min \frac{x^s [i, 0]}{|x^s [i, \bar{K}_i]|}$$

для тех i , для которых «кусоч» $x^s [i, \bar{K}_i]$ содержит все положительные компоненты вектора $x^s [i, \bar{K}_{s+1}]$. Ясно, что $\bar{K}_i \subseteq \bar{K}_{s+1}$, $i \in M$ (здесь $f = f_{s+1}$, $\bar{K}_i = \bar{K}_i^{s+1}$).

3. Шаг обобщенного жорданового исключения. Полагаем

$$x^{s+1} [i, N'] = \begin{cases} \frac{x^s [i, N']}{|x^s [i, \bar{K}_i]|}, & i = f, \\ x^s [i, N'] + \alpha_i x^{s+1} [f, N'], & i \neq f, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^{s+1}(\bar{K}_i) = -x^s [i, \bar{K}_i] x^{s+1} [f, \bar{K}_i], \quad i \neq f.$$

4. Формируем матрицу $b^{s+1} [M, N']$, которая получается из матрицы $b^s [M, N']$ заменой строки $b^s [f, N']$ на строку $b^{s+1} [f, N']$, т. е.

$$b^{s+1} [i, N] = \begin{cases} b^{s+1} [i, N], & i = f, \\ b^s [i, N], & i \neq f. \end{cases}$$

где элементы $b^{s+1} [f, N]$ определяются следующим образом:

$$b^{s+1} [f, j] = \begin{cases} x^{s+1} [f, j], & j \in \bar{K}_f, \\ 0, & j \in N \setminus \bar{K}_f. \end{cases}$$

5. Если оценки $x^{s+1} [0, j] \geq 0$, $j \in N$, то

$$x [N] = u [N, 0] = b^{s+1} [M, N] x^{s+1} [M, 0]$$

— оптимальный план задачи (10)—(12). В противном случае переходим к п. 1, где полагаем $s = s + 1$.

Замечание 2. Если на s -ом шаге некоторые компоненты вектора $x^s [M, 0]$ становятся равными нулю, то следует применить процедуру исключения нулевых компонент неопорного плана (¹³). Однако предварительно на предыдущем $(s-1)$ -шаге можно попытаться варьированием $\bar{K}_s$ добиться positivity вектора $x^s [M, 0]$.

Утверждение, аналогичное теореме 3, доказывает конечность метода, который естественно назвать расширенным симплекс методом.

3.3. Расширенный метод обратной матрицы. Пусть $M' = \{0, 1, \dots, m\}$. $\bar{x}_0 [M', M']$ — единичная матрица и $u [0, N'] = x^0 [0, N']$ (вектор на-

чальных оценок). Пусть последовательно для $s = 1, 2, \dots, s$ согласно (14) преобразуются элементы матрицы $\bar{x}^0[M', M']$. Тогда в результате получим матрицу $\bar{x}^s[M', M']$.

Утверждение 2. Пусть N_s — множество индексов ненулевых столбцов матрицы $b^s[M, N]$. Тогда матрица $\bar{x}^s[M', M']$ обладает следующими свойствами;

а) $x^s[M', N'] = \bar{x}^s[M', M'] a[M', N']$ совпадает с расширенной матрицей системы (13), полученной расширенным симплекс-методом;

б) $\bar{u}[N_s, M] = b^{sT}[M, N_s] \bar{x}^s[M, M]$ является частично-обратной матрицей относительно $a[M, N_s]$.

Таким образом, учитывая утверждение 2, можно предложить следующий метод решения задачи (10)–(12). На каждом s -м шаге определяем $x^s[M', \bar{K}_{s+1}]$ и по процедуре 3.2 преобразуем только $\bar{x}^s[M', M]$, $x^s[M', \bar{K}_s]$, $b^s[M, N_s]$. При использовании второй формы признака оптимальности плана вычисляем также $\bar{u}[N_s, M]$.

3.4. При условии, что оценки $x^s[0, i] \geq 0$, $i \in N$ и $x^s[\bar{K}_{s+1}, 0] < 0[\bar{K}_{s+1}]$, где $\bar{K}_{s+1} \subseteq M$, $s = 0, 1, 2, \dots, s$, в расширенном двойственном симплекс-методе в качестве особого направляющего выбирается не вектор-строка, а вектор-столбец $x^s[\bar{K}_s, f]$. Если $x^s[M, 0] \geq 0[M]$, то процесс заканчиваем.

3.5. В расширенном симплекс-методе могут быть применены все три правила симплекс-метода, но с расширенным толкованием. В частности:

а) на каждом s -м шаге определяем такое $\bar{K}_{s+1} \subseteq N$, которое дает наибольшее приращение линейной формы (10), т. е.

$$|x^{s+1}[f, \bar{K}_s]| x^s[0, \bar{K}_s]|, \quad \bar{K}_s \subseteq \bar{K}_{s+1};$$

б) если на s -м шаге мы отталкиваемся от неопорного плана, то в псевдобазис вводим ту расширенную оценку, которая дает наибольшее приращение (10), т. е. в этом случае $\bar{K}$ — одноэлементное множество.

Если применяется правило а), то экспоненциальные оценки В. Кли и Дж. Минти (14) не распространяются на расширенный симплекс-метод (пути разные), что подтверждается примером задач класса $(n, 2n)$ для $n = 2, 3, 4, 5$. Таким образом, вопрос о сложности расширенного симплекс-метода остается открытым. Решение его упирается в решение задачи, поставленной проф. Н. З. Шором, — определение такой стратегии, т. е. $\{\bar{K}_s\}$, которая кратчайшим путем приводит к оптимуму. Аналогичная задача ставится и с точки зрения минимизации времени.

В расширенном симплекс-методе пункты 1 и 2 заранее гарантируют, что на каждом s -ом шаге

$$x[N] := b'^T[M, N] x'[M, 0] > 0[N]$$

и значение линейной формы (10) возрастает. Однако процесс можно организовать так, чтобы особые направляющие векторы определялись из последнего условия. В этом случае $b'[M, N]$ и $x'[M, 0]$ могут содержать и нулевые, и отрицательные элементы. При таком подходе пункты 1 и 2 метода при переходе от s -го к $(s+1)$ -шагу заменяются решением следующих m простейших задач комбинаторного типа. Для каждого $i \in M$ и всех $K_i \subseteq N$, для которых значение линейной формы (10) возрастает согласно (14), определяем $x'^{s+1}[M, 0]$, где $\bar{K}_i = K_i$ и формируем $b'^{s+1}[M, N]$. Среди всех K_i и $i \in M$ выбираем тот особый направляющий вектор, который удовлетворяет указанным выше условиям и дает наибольшее приращение линейной формы (10), и переходим к пункту 3 метода. Этот подход позволяет включать в процесс увеличения линейной формы (10) не только положительные, но и отрицательные оценки.

Отметим, что на основе расширенного симплекс-метода может быть развит двойственный симплекс метод Лемке. В этом случае в качестве особого направляющего вектора выбирается не вектор-строка, а вектор-столбец.

Пусть $\bar{u}[N_s, M]$ — частично обратная матрица, полученная на s -м шаге и $u[N_s, 0] > 0[N]$. Тогда на каждом s -м шаге движение к оптимуму может быть организовано вдоль направления (сдвиг):

$$x[N_s] = u[N_s, 0] + \lambda_s c'[N_s],$$

где

$$c'[N_s] = (e[N_s, N_s] - \bar{u}[N_s, M] a[M, N_s]) c[N_s]$$

— частично-ортогональная проекция $c[N_s]$. Другими словами, мы получаем проекционный метод.

Предложенный в данной работе математический аппарат позволяет сделать следующий вывод: симплекс-метод Данцига, связанный с преобразованием Гаусса, содержит в себе большие скрытые возможности в смысле развития его идеи. Таким образом, возникает задача исследования скрытых возможностей симплекс-метода и пересмотра методов (общих и специальных), связанных с его идеей.

Отдел биофизики
Академии наук Армении

Ուղղորդիչ վեկտորի մեթոդը գծային ծրագրավորման մեջ

Աշխատությունում առաջարկվում է Գաուսի ձևավորության մեջ ընտրել ոչ թե մեկ էլեմենտ, ինչպես դա ընդունված է, այլ միաժամանակ մի քանի էլեմենտ՝ ուղղորդիչ վեկտոր: Այս միտքը թույլ է տալիս ընդհանրացնել բացառման մեթոդները և նրանց հիման վրա զարգացնել Չ. Բ. Դանցիգի սիմպլեքս մեթոդը, Լ. Վ. Կանտորովիչի հակադարձ մատրիսի մեթոդը և Դ. Ի. Շեմկեի երկակի սիմպլեքս մեթոդը:

Զարգացման էությունն այն է, որ յուրաքանչյուր քայլում ընտրվում է ոչ թե մեկ հատուկ էլեմենտ, այլ միաժամանակ մի քանի էլեմենտներ (հատուկ ուղղորդիչ վեկտոր), որը թույլ է տալիս բացառման ընդլայնված մեթոդի քայլից հետո անցնել կատարելագործված պլանի:

Քանի որ կատարելագործված պլանները դիտարկվող իմաստով միակն են, հետևաբար ապահովվում է առաջարկվող մեթոդների վերջնականությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. B. Danzig, *Econometrica*, № 17, p. 200—211 (1949)
- ² Дж. Б. Данциг, *Линейное программирование, его обобщения и применения*, Прогресс, М., 1966.
- ³ Л. В. Канторович, *ДАН СССР*, т. 37, № 7—8, с. 227—229 (1942).
- ⁴ Л. В. Канторович, М. К. Гавурин, в кн.: *Проблемы повышения эффективности работы транспорта*, Изд-во АН СССР, М., с. 100—138, 1949
- ⁵ G. E. Lemke, *Navy Res. Logistics Quart.*, т. 1, № 1, с. 36—47 (1954).
- ⁶ И. В. Романовский, *Алгоритмы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1977.
- ⁷ Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М.—Л., 1963.
- ⁸ В. В. Воеводин, *Вычислительные основы линейной алгебры*, Наука, М., 1977.
- ⁹ E. H. Moore, *Bull. Amer. Math. Soc.*, № 25, p. 394—395 (1910).
- ¹⁰ H. A. Penrose, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, № 51, p. 406—413 (1955).
- ¹¹ А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, М., 1975.
- ¹² Л. В. Канторович, *Математические методы организации и планирования производства*, в кн.: ЛГУ, 1959.
- ¹³ А. Д. Тукчев, *Кибернетика*, № 4, с. 68—72 (1984).
- ¹⁴ V. Klee, G. J. Minty, *Inequalities III*, Ed. by O. Shisha, Acad. Press, N. Y., p. 159—72, 1972.