

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

В. И. Гаврилов, член-корреспондент АН Армении В. С. Захарян

Конформная инвариантность и характеристическое свойство  
граничных значений функций класса  $M$

(Представлено 12/VI 1991)

В статье (1) рассмотрен класс  $M$  голоморфных функций в единичном круге, который строго содержит все классы Харди  $H^p$  и строго содержится в классе В. И. Смирнова  $N^+$ . Г. Ц. Тумаркин (см. (2), с. 131—141) установил свойство конформной инвариантности классов  $H^p$  и  $N^+$  и получил полную характеристику граничных функций в классах  $H^p$  и  $N^+$  в терминах аппроксимации многочленами. В настоящей статье эти результаты Г. Ц. Тумаркина распространяются на функции класса  $M$ .

1. Рассмотрим в единичном круге  $D: |z| < 1$  произвольную голоморфную функцию  $f(z)$  и обозначим  $Mf(\theta) = \sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})|$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ . Следуя терминологии статьи (1), функцию  $f(z)$  отнесем к классу  $M$ , если

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty, \quad (1)$$

где  $\log^+ t = \max\{\log t, 0\}$ ,  $t > 0$ .

В работе (1) установлены разнообразные свойства функций класса  $M$ . В частности, если обозначить через  $H^p$ ,  $p > 0$ , классы Харди в круге  $D$ , через  $N^+$  — класс В. И. Смирнова в круге  $D$  и через  $N$  — класс Неванлинны голоморфных функций в круге  $D$ , то справедливы строгие вложения  $\bigcup_{p>0} H^p \subset M \subset N^+ \subset N$ . Доказано также, что  $M$  является полным сепарабельным метрическим пространством, в котором инвариантная матрица  $d$  задается формулой

$$d(f, g) = \int_0^{2\pi} \log(1 + M(f - g)(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{2\pi}; \quad f, g \in M.$$

Непосредственная проверка позволяет заключить, что функция



$$\rho(f) = \int_0^{2\pi} \log(1 + Mf(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in M,$$

определяет полунорму в  $M$ .

Отметим также, что для любой функции  $f(z)$  класса  $M$  и любого числа  $r$ ,  $0 < r < 1$ , функция  $f_r(z) = f(rz)$  принадлежит классу  $M$  и  $f_r \rightarrow f$  в метрическом пространстве  $M$  при  $r \rightarrow 1 - 0$  (см. (1), с. 720). Непосредственно проверяется, что  $\rho(f_r) \leq \rho(f)$ ,  $0 < r < 1$ .

2. Докажем, что класс  $M$  является конформно инвариантным семейством функций.

**Теорема 1.** Для любой функции  $f(z)$  класса  $M$  и произвольного конформного отображения  $\zeta = \xi(z)$  круга  $D$  на себя композиция  $(f \circ \xi)(z) = f(\xi(z))$  принадлежит классу  $M$ .

**Доказательство.** Произвольное конформное отображение  $\zeta = \xi(z)$  круга  $D$  на себя имеет вид  $\zeta = \xi(z) = e^{ia} \cdot \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ ,  $a \in D$ ,  $a \in (-\infty, +\infty)$ , и значит, справедливы оценки

$$\frac{1-|a|}{1+|a|} \leq \frac{1}{|\xi'(z)|} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|}; \quad z, a \in D. \quad (2)$$

Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность  $\{r_n\}$ ,  $0 < r_n < r_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ , и последовательности функций  $\{f_n(x)\}$ ,  $f_n(z) = f(r_n \cdot z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\{(f_n \circ \xi)(z)\}$ ,  $(f_n \circ \xi)(z) = f(r_n \cdot \xi(z))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $|\xi| = |\xi(z)| = 1$  при  $|z| = 1$  и  $d\theta = |dz|$  на  $|z| = 1$ ,  $z = e^{i\theta}$ , то

$$M(f \circ \xi)(\theta) \leq \max_{|z|=1} |f_n(\xi(z))| = \max_{|\zeta|=1} |f_n(\zeta)| = C_n < +\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log^+ M(f_n \circ \xi)(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_{|z|=1} \log^+ [\max_{|\zeta|=1} |f_n(\xi(z))|] \cdot \frac{|dz|}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \log^+ [\max_{|\zeta|=1} |f_n(\zeta)|] \cdot \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \cdot |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \log^+ C_n \cdot \frac{1}{|\xi'(z)|} \cdot |d\zeta|, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (2), получаем оценку

$$\int_0^{2\pi} \log^+ M(f_n \circ \xi)(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \log^+ C_n < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

Неравенства (3) показывают, что функции  $f_n(\xi(z))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежит классу  $M$ . Поскольку функциональная последовательность  $\{f_n(\cdot(z))\}$  равномерно сходится к функции  $f(\xi(z))$  в круге  $D$  и схо-



дится к функции  $f(z)$  в метрике пространства  $M$ , то, в силу полноты пространства  $M$ , предельная функция  $f(z)$  обязана принадлежать классу  $M$ , что и требовалось доказать.

3. Согласно вложению  $M \subset M'$  и классической теореме Р. Неванлинны (см., например, (9), с. 82), каждая функция  $f(z)$  класса  $M$  имеет конечные угловые граничные значения  $f(e^{i\theta})$  почти во всех точках  $e^{i\theta}$  на граничной окружности  $\Gamma: |z|=1$ .

Следующая теорема содержит полную характеристику угловых граничных значений функций класса  $M$ . Мы отмечаем участие Л. Ганжулы в доказательстве необходимости условий этой теоремы.

**Теорема 2.** Пусть  $E$  произвольное измеримое множество точек окружности  $\Gamma: |z|=1$  и  $\varphi(e^{i\theta})$  — измеримая функция, заданная на  $E$ . Для того, чтобы функция  $\varphi(e^{i\theta})$  почти всюду на  $E$  совпадала с угловыми граничными значениями некоторой голоморфной в круге  $D: |z|<1$  функции  $f(z)$ , принадлежащей классу  $M$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность многочленов  $\{p_n(z)\}$ , обладающая свойствами:

1) последовательность  $\{p_n(e^{i\theta})\}$  почти всюду на  $E$  сходится к функции  $\varphi(e^{i\theta})$ ;

$$2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log^+ M p_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть для некоторой функции  $f(z)$  класса  $M$  граничная функция  $f(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$  почти всюду на множестве  $E \subset \Gamma$ . Рассмотрим произвольную числовую последовательность  $\{r_n\}$ ,  $0 < r_n < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ , и образуем функциональную последовательность  $\{f_n(z)\}$ ,  $f_n(z) = f(r_n z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in D$ . Последовательность  $\{f_n(z)\}$  равномерно сходится к функции  $f(z)$  в круге  $D$ .

Так как функции  $f_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , являются голоморфными функциями в замкнутом круге  $\bar{D}: |z| \leq 1$ , то согласно аппроксимационной теореме Рунге, существует такая последовательность многочленов  $\{p_n(z)\}$ , что

$$|p_n(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n \quad \text{для всех } z, \quad |z| \leq 1, \quad (4)$$

где числовая последовательность  $\{\varepsilon_n\}$ ,  $\varepsilon_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .

Из свойства (4) и предшествующих ему рассуждений следует, что последовательность многочленов  $\{p_n(z)\}$  равномерно сходится к функции  $f(z)$  в круге  $D$ .

Так как угловые граничные значения  $f(e^{i\theta})$  существуют почти всюду на окружности  $\Gamma: |z|=1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$  для почти всех точек  $e^{i\theta} \in \Gamma$ . Поэтому, согласно (4),  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$  почти всюду на  $\Gamma$  и значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$  почти всюду



на  $E$ , т. е. выполняется свойство 1) в условиях теоремы 2.

Проверим выполнение условия 2) этой теоремы. Заметим прежде всего, что поскольку

$$|p_n(re^{i\theta})| \leq |p_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| + |f(re^{i\theta})|, \quad n \in N,$$

то

$$\begin{aligned} Mp_n(\theta) &= \sup_{0 < r < 1} |p_n(re^{i\theta})| \leq \sup_{0 < r < 1} |p_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| + \sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})| = \\ &= M(p_n - f)(\theta) + Mf(\theta), \quad n \in N, \end{aligned}$$

и значит,

$$\log^+ Mp_n(\theta) \leq \log^+ M(p_n - f)(\theta) + \log^+ Mf(\theta) + \log 2, \quad n \in N. \quad (5)$$

Так как последовательность полиномов  $\{p_n(z)\}$  равномерно сходится к функции  $f(z)$  в круге  $D$ , то, начиная с некоторого номера  $N_0 \in N$ , выполняется неравенство  $M(p_n - f)(\theta) < 1$ ,  $n \geq N_0$ . Поскольку  $f(z) \in M$ , то из (5) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} + \log 2 = C_1, \quad n \geq N_0. \quad (6)$$

С другой стороны, можно указать такую постоянную  $C_2$ ,  $0 < C_2 < +\infty$ , что для всех номеров  $n \in N$ , не превосходящих число  $N_0$ , и всех  $\theta \in [0, 2\pi)$  выполняется неравенство  $\log^+ Mp_n(\theta) \leq C_2$ , и значит,

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq C_2, \quad n \leq N_0. \quad (7)$$

Полагая  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , заключаем, на основании (6) и (7), что справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq C, \quad n \in N,$$

которое эквивалентно условию 2) теоремы 2.

Достаточность. Поскольку многочлены принадлежат классу  $M$ , то условия 1) и 2) теоремы 2 становятся условиями теоремы А. Я. Хинчина—А. Островского (см. (2), с. 118), согласно которой последовательность полиномов  $\{p_n(z)\}$  сходится равномерно в круге  $D$  к некоторой функции  $f(z)$  из класса  $M$ , для которой  $f(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$  почти во всех точках  $e^{i\theta}$  множества  $E$ .

Многочлены  $p_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежат также классу  $M$ . Поскольку класс  $M$  является полным метрическим пространством, то функция  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z)$  принадлежит классу  $M$ .

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Հայաստանի ԴԱ բոլակից անդամ Վ. Ի. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Այդասի ֆունկցիաների կոնֆորմ ինվարիանտությունը և էզոմորֆիզմների  
բնութագրիչ հատկություններ

Հոդվածում դիտարկվում է միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների  
այսպես կոչված  $M$  դասը, որը պարունակում է Հարդիի դասերը և ընկնում  
է Սմիթմանի դասերի մեջ: Հ. Տումարկինը ստացել էր Հարդիի և Սմիթմանի դա-  
սերի կոնֆորմ ինվարիանտության հատկությունը և այդ դասերի էզոմորֆիզմ-  
ների ֆունկցիաների լրիվ բնութագրումը մոտարկող բազմանդամների տերմին-  
ներով:

Ներկա հոդվածում այդ երկու հատկությունները տարածվում են  $M$  դասի  
ֆունկցիաների վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Hong Oh Kim, Canad. J. Math., v. 40, No 3, p. 718—741 (1988). \* Ի. Ի. Բրու-  
նով, Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-е, М.—Л., 1950.