

УДК 517.968, 517.514

А. Г. Камалян

Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 29/V 1991)

Введение. Пусть Γ — простой замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбивающий плоскость на две области Γ_+ и Γ_- . В дальнейшем ради простоты будем считать, что $0 \in \Gamma_+$, $\infty \in \Gamma_-$. Пусть S — оператор сингулярного интегрирования вдоль контура Γ , действующий в пространстве L_p ($L_p = L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$):

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{\Gamma} \varphi(t) \frac{dt}{t-x}, \quad \varphi \in L_p.$$

Введем проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ и следующие классы функций: $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p + \text{const}$, $M_p^{\pm} = L_p^{\pm} + R$, где R — множество рациональных функций с полюсами вне Γ . Если все элементы матриц-функции (м-ф) G порядка $k \times k$ принадлежат одному и тому же классу функций H , то условимся коротко обозначать $G \in H^{k \times k}$.

Под факторизацией м-ф $G \in L_1^{k \times k}$ в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) будем понимать представление

$$G(t) = G_+(t) \Lambda(t) G_-(t) \quad (t \in \Gamma), \quad (1)$$

где $G_+ \in (L_p^+)^{k \times k}$, $G_- \in (L_p^-)^{k \times k}$, $G_+^{-1} \in (L_p^+)^{k \times k}$, $G_-^{-1} \in (L_p^-)^{k \times k}$ ($q = p/(p-1)$) $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{x_1} \dots t^{x_k}]$ и $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$ — целые числа, называемые частными индексами м-ф G (см. (1, 2)). Хорошо известно, что в скалярном случае ($k=1$) при условии существования факторизации факторы могут быть записаны в явном виде с помощью проекторов $P_{\pm}$. В матричном случае ($k > 1$) эффективные методы факторизации построены только для частных классов м-ф (например, рациональных или треугольных).

Под мероморфной факторизацией м-ф $G \in L_1^{k \times k}$ в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) будем понимать представление

$$G(t) = A_+(t) A_-(t) \quad (t \in \Gamma) \quad (2)$$

где $A_+ \in (M_p^+)^{k \times k}$, $A_- \in (M_q^-)^{l \times l}$, $A_+^{-1} \in (M_p^+)^{k \times k}$, $A_-^{-1} \in (M_q^-)^{l \times l}$ ($q = p/p - 1$).

Как известно (см. (2), теорему 2.10), из мероморфной факторизуемости м-ф G следует ее факторизуемость, причем представление (1) можно получить из представления (2) эффективным образом с помощью конечного числа алгебраических операций.

Ряд прикладных задач сводится к факторизации м-ф вида $\sum_{s=0}^n a_s Q_s$, где a_s — скалярные функции, а Q_s — рациональные м-ф (см. (3-5)). В работах (3-9) предложены различные методы эффективной факторизации для м-ф такого вида, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям алгебраического характера. За исключением (4, 9) все эти работы относятся к м-ф второго порядка.

В данной работе предлагается метод мероморфной факторизации м-ф вида

$$A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s, \quad (3)$$

где a_s ($s = 0, 1, \dots, n-1$) скалярные функции, $Q \in R^{k \times k}$, $Q^n = f^n I_k$, $f^n \in R$ (I_k — единичная матрица $k \times k$).

1°. Обозначим через $\mathcal{Q}_p(Q)$ ($1 \leq p \leq \infty$) класс всех м-ф $A \in L^{k \times k}$, представимых в виде (3), с $a_s \in L_p$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что если

$$A, B \in \mathcal{Q}_1^k(Q), \quad A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s, \quad B = \sum_{s=0}^{n-1} b_s Q^s,$$

то

$$C = AB = BA = \sum_{s=0}^{n-1} c_s Q^s,$$

где

$$c_s = \sum_{j=0}^s a_j b_{s-j} + f^n \sum_{j=s+1}^{n-1} a_j b_{n-j+s}. \quad (4)$$

Пусть $L(t)$ ($t \in \Gamma$) жорданова форма $Q(t)$, а м-ф $T(t)$ такая, что $TQT^{-1} = L$. Поскольку $L^n = TQ^nT^{-1} = f^n I_k$, то

$$L = \text{diag} [e^{\psi_1(0)} f, e^{\psi_1(1)} f, \dots, e^{\psi_1(k-1)} f], \quad (5)$$

где ψ_l ($l \in \Gamma$) — семейство возрастающих отображений множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ в множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ($\psi_l(0) \leq \psi_l(1) \leq \dots \leq \psi_l(k-1)$), $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$.

Следует заметить, что $A \in \mathcal{Q}_p^k(Q)$, вообще говоря, не единственным образом представляется в виде (3). Более точно, имеет место следующая

Лемма 1. Элементы $\mathfrak{Q}_p^k(Q)$ представляются в виде (3) единственным образом тогда и только тогда, когда $k \geq n$ и множество собственных значений Q почти для всех $t \in \Gamma$ совпадает с множеством $\{f, \varepsilon f, \dots, \varepsilon^{n-1} f\}$.

Доказательство. Пусть $\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s = 0$. Учитывая равенство (5)

$$\text{из } 0 = T \left(\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s \right) T^{-1} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s L^s \text{ получим}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{\psi_t(r)s} f^r a_s = 0 \quad r = 0, 1, \dots, k-1. \quad (6)$$

Чтобы элементы $\mathfrak{Q}_p^k(Q)$ представлялись в виде (3) единственным образом, необходимо и достаточно, чтобы система (6) имела только тривиальное решение $a_s = 0$ ($s = 0, \dots, n-1$) почти для всех $t \in \Gamma$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда $k \geq n$ и ψ_t является сюръективным отображением почти для всех $t \in \Gamma$.

Следствие. В случае $k = n$ утверждение леммы 1 справедливо тогда и только тогда, когда следы м-ф Q^s ($s = 1, \dots, n-1$) равны нулю.

Действительно, в случае $k = n$ будем иметь $\psi_t(r) = r$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$), откуда в силу $\text{tr } Q^s = \text{tr } L^s$ ($s = 1, \dots, n-1$) получим требуемое.

2°. Пусть $Q_0 = (q_{i,j})_{i,j=1}^n \in R^{n \times n}$, где $q_{n+1} = f^n$, $q_{i,i+1} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и $q_{i,j} = 0$ при $i - j < n-1$, $j - i \neq 1$. Легко проверить, что $Q_0^n = f^n I_n$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $A_0 = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q_0^s \in \mathfrak{Q}_1^n(Q_0)$. Тогда для факторизуемости м-ф A_0 в L_p ($1 < p < \infty$) необходимы и достаточна факторизуемость следующих функций $\bar{a}_m$:

$$\bar{a}_m = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sm} g^s a_s, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1). \quad (7)$$

Если $\bar{a}_m = (\bar{a}_m)_+ (\bar{a}_m)_-$ — некоторые мероморфные факторизации функций $\bar{a}_m$ в L_p , а $(A_0)_\pm = \sum_{s=0}^{n-1} (a_s)_\pm Q_0^s$, где

$$(a_s)_\pm = \frac{1}{n} g^{-s} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{m(n-s)} (\bar{a}_m)_\pm \quad (s = 0, 1, \dots, n-1) \quad (8)$$

то представление $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$ является мероморфной факторизацией м-ф A_0 в L_p .

Доказательство. Введем м-ф: $\bar{A}_0 = \text{diag} [\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}]$,
 $(\bar{A}_0)_\pm = \text{diag} [(\bar{a}_0)_\pm, (\bar{a}_1)_\pm, \dots, (\bar{a}_{n-1})_\pm]$, $F = \text{diag} [1, f, \dots, f^{n-1}]$

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} (\epsilon^{(k-1)(j-1)})_{k,j=1}^n.$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, в равенствах

$$A_0 = FE\bar{A}_0E^{-1}F^{-1}, \quad (A_0)_\pm = FE(\bar{A}_0)_\pm E^{-1}F^{-1}, \quad (9)$$

откуда следует равенство $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$. Условия
 $(A_0)_+ \in (M_p^+)^{n \times n}$, $(A_0)_+^{-1} \in (M_q^+)^{n \times n}$, $(A_0)_- \in (M_q^-)^{n \times n}$, $(A_0)_-^{-1} \in (M_p^-)^{n \times n}$
в силу формул (8), (9) и $F^\pm \in R$ эквивалентны условиям

$$(\bar{a}_m)_+ \in M_p^+, \quad (\bar{a}_m)_- \in M_q^+, \quad (\bar{a}_m)_- \in M_q^-, \quad (\bar{a}_m)_-^{-1} \in M_p^-, \\ (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

3°. Обозначим через φ отображение $\varphi: \Omega_p^n(Q_0) \rightarrow \Omega_p^b(Q)$ ($1 \leq p \leq \infty$),
действующее по формуле $\varphi\left(\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q_s^0\right) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s$. Нетрудно убе-
диться, что справедлива следующая

Лемма 2. Если $A \in \Omega_1^n(Q_0)$, $B \in \Omega_1^n(Q_0)$ и $AB \in \Omega_q^n(Q_0)$ ($1 \leq q \leq \infty$), то $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \in \Omega_q^b(Q)$

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. Пусть $A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s \in \Omega_1^b(Q)$, а функции $\bar{a}_m$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$), определенные по формулам (7), допускают ме-
роморфную факторизацию в L_p ($1 < p < \infty$), $\bar{a}_m = (\bar{a}_m)_+ (\bar{a}_m)_-$.

Если $A_\pm = \sum_{s=0}^{n-1} (a_s)_\pm Q^s$, где $(a_s)_\pm$ определены по формулам (8).

то $A = A_+ A_-$ является мероморфной факторизацией м-ф A в L_p .

Доказательство. Пусть м-ф $A_0 \in \Omega_1^n(Q_0)$ такая, что $\varphi(A_0) = A$. Тогда в силу теоремы 1 м-ф A_0 допускает мероморфную факториза-
цию $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$. Из определений $(A_0)_\pm$, $A_\pm$, в силу леммы 2,
имеем $A = \varphi(A_0) = \varphi((A_0)_+) \varphi((A_0)_-) = A_+ A_-$. Заметив, что из
 $B_0 \in \Omega_p^n(Q_0) \cap (M_p^+)^{n \times n}$ следует $\varphi(B_0) \in \Omega_p^b(Q) \cap (M_p^+)^{k \times k}$, и учитывая
 $\varphi((A_0)_\pm^{-1}) = A_\pm^{-1}$, получим доказательство теоремы.

Замечание 1. Условия факторизуемости всех функций $\bar{a}_m$
($m = 0, 1, \dots, n-1$) не являются необходимым условием для факто-
ризуемости A . Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $Q = fI_n$.
Эти условия станут необходимыми, если имеет место условие леммы

1. Действительно, в этом случае φ будет взаимно-однозначным отображением.

Замечание 2. Поскольку доказательства полученных результатов не зависят от контура Γ , то они остаются справедливыми как в случае бесконечных контуров (в частности вещественной прямой), так и в случае замкнутых сложных контуров.

Замечание 3. Теорема 1 справедлива также и для м-ф блочной структуры, т. е. когда в условии теоремы 1 $a_s \in L_1^{m \times m}$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$; $m > 1$), $Q_0 = (q_{i,j})_{i,j=1}^n \in R^{nm \times nm}$, $q_{i,j} \in R^{m \times m}$, где $q_{n,1} = f^n I_n$, $q_{i,i+1} = I_m$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и $q_{i,j} = 0$ при $i-j < n-1$, $j-i \neq 1$.

4. Пусть $K(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обобщенная функция с преобразованием Фурье $\bar{K}(x) \in L_\infty(-\infty, \infty)$ и $f^n(x) = -K(\ln x)$ ($x > 0$). Введем м-ф $Q = (q_{i,j})_{i,j=1}^n$ с $q_{1,2} = f^n$, $q_{i,i+1} = 1$ ($i = 2, \dots, n-1$), $q_{n,1} = 1$ и $q_{i,j} = 0$ при $i-j < n-1$, $j-i \neq 1$.

В работе ⁽¹⁰⁾ показано, что исследование вопросов разрешимости уравнения

$$y(x) + (\operatorname{th}(\pi x) - \nu)^n \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) y(t) dt = h(x)$$

$$(\nu \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}; y, h \in L_2(-\infty, \infty))$$

водится к факторизации м-ф $G = (1 + \beta \alpha^{n-1} \theta f^n) I_n + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \alpha^{k-1} \theta Q^k$, где $\alpha = 1 - \nu$, $\beta = 1 + \nu$, $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Ясно, что при $f \in R$ м-ф $G \in \Omega_-^n(Q)$ и для нее справедлива теорема 2. Примером ядра $K(x)$, для которого $f \in R$, может служить следующая функция:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\{\beta_2(sn - mn + ix) - \beta_1\} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(sn + ix) \Gamma(kn + mn - sn - ix)}{(kn + mn - 1)!} F(kn, sn + ix; kn + mn; a_2/a_1),$$

где $k, m, s \in \mathbb{N}$, $s < k + m$, $|\operatorname{Im} \beta_k| < \pi$, $\alpha_k = \exp \beta_k$ ($k = 1, 2$), F — гипергеометрический ряд Гаусса.

В этом случае (см. ⁽¹¹⁾)

$$f(x) = e^{1/2} \frac{x^s}{(a_1 + x)^k (a_2 + x)^m}$$

Մատրիցա-ֆունկցիաների որոշ դասերի էֆեկտիվ ֆակտորիզացում

Ի տարբերություն սկալյար դեպքի, մատրիցա-ֆունկցիայի էֆեկտիվ (բացահայտ) ֆակտորիզացման խնդրի լուծումը հայտնի է միայն մասնավոր դասերի համար (որինակ՝ ուսցիոնալ մատրիցա-ֆունկցիաների դեպքում)։

Մի շարք կիրառական հարցերում առաջանում է ուսցիոնալ մատրիցաների և սկալյար ֆունկցիաների կոմբինացիայով ներկայացվող մատրիցա-ֆունկցիաների ֆակտորիզացման խնդիրը։

Հոդվածում կառուցվում է մերոմորֆ ֆակտորիզացում $\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s$ տեսքի մատրիցա-ֆունկցիաների համար, որտեղ a_s -ը սկալյար ֆունկցիաներն են, Q -ն $k \times k$ կարգի ուսցիոնալ մատրիցա-ֆունկցիա է, $Q^n = f^n I_k$, f -ը ուսցիոնալ ֆունկցիա է։

Կառուցված մերոմորֆ ֆակտորիզացումը հնարավորություն է տալիս ստանալ նշված տեսքի մատրիցա-ֆունկցիաների ֆակտորիզացումը վերջավոր թվով հանրահաշվական դործողությունների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Basel, Birkhäuser, 1981. ² G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Basel, Birkhäuser, 1987. ³ E. Melster, F.-O. Speck, OT: Advanc. and Applicat., v. 41 (1989). ⁴ Melster, F.-O. Speck, Z. Anal. Anw. Bd 8, № 4 (1989). ⁵ A. A. Хранков, ПММ, т. 35, № 4 (1971). ⁶ V. T. Daniele, SIAM J. Appl. Math., p. 44, № 4 (1984). ⁷ A. B. Lebre, Int. Eg. OT, v. 12, № 3 (1989). ⁸ S. Prössdorf, F.-O. Speck, Proc. Roy. Soc. Edin., Ser. A 115 (1990). ⁹ D. S. Jones, Proc. Roy Soc. Lond., Ser. A 393 (1984). ¹⁰ A. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян, Функц. анализ и прил., т. 23, в. 2 (1989). ¹¹ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, Наука, М., 1969.