ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян, А. Р. Мухсихачоян

О существовании «стоячей» поверхностной сдвиговой волны вдоль периодически неровной поверхности

(Представлено академиком АН Армении С. А. Амбарцумяном 3/III 1991)

В последнее время в акустике большое применение нашли устройства, основанные на распространении акустических волн при наличии периодически неровной поверхности. В связи с этим практическую значимость приобрела проблема существования поверхностных упругих волн в периодических структурах, исследованию которой посвящены работы ([1-3]). В настоящей статье приводятся решения для задачи двух полубесконечных сред, находящихся в контакте, по периодически неровной поверхности.

1. Пусть две упругие среды занимают полупространства $x_2>f(x_1)$ и $x_2<f(x_1)$. Между ними поверхность раздела изменяется вдоль оси OX по закону $x_2=f(x_1)$. Величины, характеризующие эти среды, будут отмечены индексами (1) и (2) соответственно. Для определенности в прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) положительное направление оси OX_2 выбираем таким обрзэом, чтобы она была направлена во внутрь упругого полупространства с поперечной скоростью $c_1>c_2$. Обозначим через U_i смещения частиц сред вдоль оси OX_3, μ_i и ρ_i модуль упругости и плотность среды соответственно, где $i=1,2$.

Уравнения движения в каждом материале имеют следующий вид:

$$\Delta U_i = c_i^{-2}\ddot{U}_i, \tag{1.1}$$

где $c_i^2=\mu_i/\rho_i$, $i=1, 2$, $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2$.

На поверхности раздела $x_2=f(x_1)$ выполняются условия непрерывности перемещений и тангенциальных компонент механических напряжений

$$U_1=U_2,\qquad [\sigma_{32}]-[\sigma_{31}]\cdot\frac{\partial f(x_1)}{\partial(x_1)}=0,\qquad [\sigma_{ij}]=\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2. \tag{1.2}$$

Допустим, что поверхность раздела имеет периодические неоднородности типа

$$f(x_1) = a \cos \nu_2 x_1, \tag{1.3}$$

где $\nu_2 = 2\pi/l$, l — период неоднородностей, a — амплитуда. Поставленная задача решается в случае, когда граничные условия выполняются приближенно, т. е. на поверхности $x_2=0$ (слабая неровность).

Представляя решения уравнений (1.1) в виде

$$U_1 = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_2) \sin \nu_n x_1, \qquad U_2 = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_2) \sin \nu_n x_1, \tag{1.4}$$

$\nu_n = \pi n/l$ и требуя, чтобы они были затухающими на бесконечностях, находим

$$F_n(x_2) = A_n \exp(-\nu_n \gamma_{n1} x_2), \qquad \Phi_n(x_2) = B_n \exp(\nu_n^0 \gamma_{n2} x_2), \tag{1.5}$$

где $\gamma_{ni} = (1 - v_n^2/c_i^2)^{1/2}$, $v_n = \omega^2/\nu_n^2$, $v = v_1$ — первое приближение фазовой скорости сдвиговой поверхностной волны. Здесь условием затухания волны является

$$0 < v < c_2. \tag{1.6}$$

Граничные условия (1.2) с учетом представлений (1.3) и (1.4) приводятся к следующим условиям

$$\begin{gathered} F_n(0) - \Phi_n(0) = 0, \\ \mu_1 [F_n'(0) + \varepsilon F_{n-2}(0)\nu_{n-2} - \varepsilon F_{n+2}(0)\nu_{n+2}] = \\ = \mu_2 [\Phi_n'(0) + \varepsilon \Phi_{n-2}(0)\nu_{n-2} - \varepsilon \Phi_{n+2}(0)\nu_{n+2}]. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь $\varepsilon = \pi a/l$. Подставляя из (1.5) $F_n(0)$, $\Phi_n(0)$, $F_n'(0)$ и $\Phi_n'(0)$ в уравнения (1.7), получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n и B_i. Исходя из сходимости такой системы (доказательство приводится ниже) становится возможным сделать еще одно приближение—рассматривать конечное число уравнений. Равенство нулю определителя полученной системы даст дисперсионное уравнение для определения скорости поверхностной волны. В частности, для первой формы волны ($n=1$) дисперсионное уравнение представляется в виде

$$\Delta_1(v, \varepsilon) = \varepsilon(1-g) - g(1 - v^2/c_2^2)^{1/2} - (1 - \theta v^2/c_2^2)^{1/2}, \tag{1.8}$$

где $\theta = c_2^2/c_1^2$, $g = \mu_2/\mu_1$.

При ровной границе раздела упругих сред ($\varepsilon=0$), как видно из (1.8), поверхностной волны нет. Когда среда (2) отождествляется с вакуумом, т. е. рассматривается задача с постановкой упругое тело—вакуум ($\mu_2 = 0$), уравнение (1.8) записывается в виде ([3]) $v^2 = c_1^2(1 - \varepsilon^2)$. Если берутся одинаковые упругие материалы, то поверхностной волны не существует. Такой же результат получился бы, если бы взяли $\mu_1 = \mu_2$, но $\rho_1 = \rho_2$.

Учитывая условие затухания волны (1.6), легко заметить, что

$$\Delta_1(0, \varepsilon) = \varepsilon - 1 - g(1+\varepsilon), \qquad \Delta_1(c_2, \varepsilon) = \varepsilon(1-g) - (1-\theta)^{1/2}$$

Следовательно, условие существования поверхностной волны запишется следующим образом ($g<1$, $\varepsilon>0$):

$$(1-\theta)^{1/2} < \varepsilon(1-g) < 1-g.$$

Единственность этой волны подтвердится, если учесть, что $\Delta_1^{'}>0$

2. Доказательство сходимости бесконечной однородной линейной алгебраической системы приведем для полупространства, т. е. когда $\mu_2=0$. С этой целью запишем дисперсионные уравнения для нескольких значений n:

$$\begin{gathered}
\Delta_1(v, \varepsilon) = \varepsilon - (1 - v^2/c_1^2)^{1/2} = 0;\\
\Delta_2(v, \varepsilon) = -[\varepsilon - (1 - v^2/c_1^2)^{1/2}](1 - v^2/9c_1^2)^{1/2} + \varepsilon^2 = 0;\\
\Delta_3(v, \varepsilon) = [\varepsilon - (1 - v^2/c_1^2)^{1/2}](1 - v^2/9c_1^2)^{1/2}(1 - v^2/25c_1^2)^{1/2} +\\
+ \varepsilon^2[\varepsilon - (1 - v^2/c_1^2)^{1/2}] - \varepsilon^2(1 - v^2/25c_1^2)^{1/2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

С помощью (2.1) запишем рекуррентное дисперсионное уравнение в форме

$$\Delta_n(v, \varepsilon) = -(1 - v^2_{2n-1}/c_1^2)^{1/2}\Delta_{n-1} + \varepsilon^2\Delta_{n-2}; \tag{2.2}$$

здесь $\Delta_0 = 1$, $\Delta_{-1} = 1/\varepsilon$.

Уравнение

$$\Delta_n(v, \varepsilon) = 0 \tag{2.3}$$

имеет решение $v^2/c_1^2 = 1 - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $0 < v/c_1 < 1$. Так как Δ_n имеет порядок единицы, то из (2.2) следует сходимость бесконечной системы при $\varepsilon < 1$.

3. Доказательство существования и единственности решения уравнения (2.3) основано на рекуррентной формуле (2.2) и дается методом математической индукции. С этой целью покажем существование единственного корня дисперсионных уравнений для первых трех значений n при $0<v/c_1<1$. Из (2.1) следует

$$\begin{array}{lll}
\Delta_1(0, \varepsilon)<0, & \Delta_1(c_1, \varepsilon)>0, & \Delta_1^{'}(v, \varepsilon)>0.\\
\Delta_2(c, \varepsilon)>0, & \Delta_2(c_1, \varepsilon)<0, & \Delta_2^{'}(v, \varepsilon)<0,\\
\Delta_3(0, \varepsilon)<0, & \Delta_3(c_1, \varepsilon)>0, & \Delta_3^{'}(v, \varepsilon)>0.
\end{array}$$

Предполагая, что существует единственное решение для уравнений $\Delta_{2n-2}(v, \varepsilon)=0$ и $\Delta_{2n-1}(v, \varepsilon)=0$, т. е.

$$\begin{array}{lll}
\Delta_{2n-2}(0, \varepsilon)>0, & \Delta_{2n-2}(c_1, \varepsilon)<0, & \Delta_{2n-2}^{'}(v, \varepsilon)<0,\\
\Delta_{2n-1}(0, \varepsilon)<0, & \Delta_{2n-1}(c_1, \varepsilon)>0, & \Delta_{2n-1}^{'}(v, \varepsilon)>0,
\end{array} \tag{3.1}$$

докажем следующее:

$$\Delta_{2n}(0, \varepsilon) > 0, \qquad \Delta_{2n}(c_1, \varepsilon) < 0, \qquad \Delta_{2n}(v, \varepsilon) < 0,$$

$$\Delta_{2n+1}(0, \varepsilon) < 0, \qquad \Delta_{2n+1}(c_1, \varepsilon) > 0, \qquad \Delta_{2n+1}(v, \varepsilon) > 0$$

Исходя из (2.2) для $\Delta_{2n}(v, \varepsilon)$ имеем

$$\Delta_{2n}(v, \varepsilon) = -(1 - v_{4n-1}^2/c_1^2)^{1/2}\Delta_{2n-1} + \varepsilon^2\Delta_{2n-2}.$$

Следовательно

$$\Delta_{2n}(0, \varepsilon) = -\Delta_{2n-1}(0, \varepsilon) + \varepsilon^2\Delta_{2n-2}(0, \varepsilon) > 0;$$

$$\Delta_{2n}(c_1, \varepsilon) = -\Delta_{2n-1}(c_1, \varepsilon) + \varepsilon^2\Delta_{2n-2}(c_1, \varepsilon) < 0:$$

$$\Delta_{2n}(v, \varepsilon) = \frac{v_{4n-1}/c_1^2}{(1 - v_{4n-1}^2/c_1^2)^{1/2}}\Delta_{2n-1} - (1 - v_{4n-1}^2/c_1^2)\Delta_{2n-1} + \varepsilon^2\Delta_{2n-2}. \quad (3.2)$$

Легко показать, что $|\Delta_1| \sim 1$, $|\Delta_2| \sim 1$, и, если допускать, что $|\Delta_{2n-1}| \sim 1$, то, применяя метод математической индукции с учетом выражения (3.2), получим $|\Delta_{2n}| \sim 1$. Поскольку по предположению (3.1) $\Delta_{2n-1}(v, \varepsilon)$ — монотонно возрастающая функция, то в выражении (3.2) меняем Δ_{2n-1} на наибольшее свое значение, т. е. на ε, а $(1 - v_{4n-1}^2/c_1^2)^{1/2} \sim 1$. Тогда

$$\Delta_{2n}(v, \varepsilon) \simeq (v_{4n-1}/c_1^2)\cdot\varepsilon - 1 - \varepsilon^2.$$

Учитывая, что $v_{4n-1} = v/(4n-1)$, $v/c_1 < 1$, $\varepsilon < 1$, окончательно получим

$$\Delta_{2n}(v, \varepsilon) \simeq -1 + o(\varepsilon) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким же образом можно доказать существование и единственность решения для $\Delta_{2n+1}(v, \varepsilon) = 0$.

В общем случае, когда $\mu_2 \neq 0$, доказательство сходимости и существования единственного решения делается аналогичным образом.

Институт механики
Академии наук Армении

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ա. Ռ. ՄՈՒԽՍԻԽԱՉՈՅԱՆ

Պարբերաբար անհարթ մակերևույթի երկայնով սահքի «կանգուն» մակերևութային ալիքի գոյության մասին

Դիտարկված է ընդհանուր պարբերաբար անհարթ եզր ունեցող երկու կիսաանվերջ առաձգական միջավայրում սահքի մակերևութային ալիքի գոյության հարցը: Ստացված է առաջին կարգի մոտավորությամբ դիսպերսիոն հավասարում:

Ապացուցված է հավասարման լուծման միակությունը և ստացված է այդ լուծմանը համապատասխանող ալիքի գոյության պայմանը։ Մասնավոր դեպքում՝ $\mu_2=0$, լուծումների գոյության և միակության համար բերված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Яковенко*, Укр. физ. журн., № 9, с. 1424—1425 (1982). [2] *Ю. В. Гуляев, В. П. Плесский*, УФН, т. 157, вып. 1, с. 85—127 (1989). [3] *М. В. Белубекян*, ДАН АрмССР, т. 90, № 2, с. 71—74 (1990).