

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК. 539.3

В. С. Тоноян, Н. С. Мелкумян

Антиплоская контактная задача для упругой полуплоскости с вертикальной трещиной, идущей от границы полуплоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 27/VII 1991)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости ($x \geq 0$) с вертикальной конечной трещиной ($0 < x < a$), выходящей на границу. К границе полуплоскости по обе стороны от начала трещины приклеплены два симметричных штампа конечных размеров ($0 \leq |y| \leq b$).

Принимается, что на штампы действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации.

Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) со смешанными граничными условиями

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных интегральных уравнений. Парные интегральные уравнения решаются в замкнутом виде методом ортогонализации, и полученная система сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма I-го рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Выведены формулы для определения напряжений и перемещений в любой точке полуплоскости. Получены формулы для контактных напряжений. Выделена особенность и вычислены коэффициенты интенсивности напряжений как на конце трещины, так и на конце жесткоцементированного штампа.

При приравнивании значения коэффициента интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде.

В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадрата при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} U_z(0, y) &= f_1(y), & 0 \leq y < b; \\ \tau_{zx}(0, y) &= f_2(y), & b < y < \infty; \\ \tau_{zy}(x, 0) &= f_3(x), & 0 < x < a; \\ U_z(x, 0) &= 0, & a \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье (1):

$$U_z(x, y) = \int_0^{\infty} A(\alpha) e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha + \int_0^{\infty} C(\beta) e^{-\beta x} \cos \beta x d\beta, \quad (2)$$

тогда для касательных напряжений имеется:

$$\tau_{zx} = -G \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha - G \int_0^{\infty} \beta C(\beta) e^{-\beta x} \sin \beta x d\beta; \quad (3)$$

$$\tau_{zy} = G \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} \cos \alpha y d\alpha - G \int_0^{\infty} \beta C(\beta) e^{-\beta x} \cos \beta x d\beta.$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). После удовлетворения граничным условиям (1) получается следующая система «парных» интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} A(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = f_1(y) - \int_0^{\infty} C(\beta) e^{-\beta y} d\beta; & 0 \leq y < b; \\ \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = -\frac{1}{G} f_2(y); & b < y < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \beta C(\beta) \cos \beta x d\beta = -\frac{1}{G} f_3(x) + \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha; & 0 < x < a \\ \int_0^{\infty} C(\beta) \cos \beta x d\beta = 0, & a \leq x < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Подобные «парные» интегральные уравнения рассматривались в работах (2-4) и др).

Используя результаты работ (3, 4) для функций $A(\alpha)$ и $C(\beta)$, получим следующие выражения из (4) и (5):

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi_1(r) J_0(\alpha r) dr + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_2(r) J_0(\alpha r) dr - \\ - \int_0^a C(\beta) d\beta \int_0^a \left| \beta r L_0(\beta r) + \frac{2}{\pi} - \beta r I_0(\beta r) \right| J_0(\alpha r) dr, \quad (6)$$

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_2(t) J_0(\beta t) dt + \\ + \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) d\alpha \int_0^a t [I_0(\alpha t) - L_0(\alpha t)] J_0(\beta t) dt. \quad (7)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом; $I_0(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента; $L_0(z)$ — функция Струве от мнимого аргумента.

Исключая функцию $C(\beta)$ из (7) и (6), для функции $A(\alpha)$ получается следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$A(\alpha) = \Omega(\alpha) + \int_0^{\infty} A(\alpha) K(\gamma, \alpha) d\gamma, \quad (8)$$

где

$$\Omega(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi_1(r) J_0(\alpha r) dr + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_2(r) J_0(\alpha r) dr - \\ - \frac{4}{\pi^2} \int_0^a t \varphi_3(t) dt \int_0^b \frac{J_0(\alpha r)}{t^2 + r^2} dr; \quad (9)$$

$$K(\gamma, \alpha) = \frac{2}{\pi} \gamma \int_0^a t^2 [L_0(\gamma t) - I_0(\gamma t)] dt \int_0^b \frac{J_0(\alpha r)}{t^2 + r^2} dr. \quad (10)$$

Очевидно, что функция $\Omega(\alpha)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\alpha \rightarrow \infty$.

С использованием результатов работы (5) доказываем, что (8) можно решить методом последовательных приближений.

Решая интегральное уравнение (8) методом последовательных приближений, получим выражение функции $A(\alpha)$. Далее, по формуле (7), можно определить искомую функцию $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, напряже-

նյա մե ընթացքում և շարժումները կտրուկի (y=0) որոշվում են հետևյալ բանաձևերով:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = & \frac{2}{\pi} \frac{Gx}{a} \frac{\varphi_3(a)}{\sqrt{x^2 - b^2}} + \frac{Gx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ & \times \int_0^{\infty} \alpha [I_0(\alpha a) - L_0(\alpha a)] A(\alpha) d\alpha + \frac{2}{\pi} Gx \int_0^{\infty} \frac{\varphi_3(t) - t\varphi_3'(t)}{t^2 \sqrt{x^2 - t^2}} dt + \\ & + Gx \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^{\infty} z^2 \left[L_1(\alpha t) + \frac{2}{\pi} - L_1(\alpha t) \right] A(\alpha) d\alpha + \\ & + G \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha, \quad a < x < \infty; \\ U_z(x, 0) = & \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \\ & + \int_x^{\infty} \frac{1 dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \int_0^{\infty} \alpha [I_0(\alpha t) - L_0(\alpha t)] A(\alpha) d\alpha, \quad 0 < x < a. \end{aligned} \quad (12)$$

Կոնտրոլային գործակիցի K_{III} արժեքը կազմում է

$$K_{III} = Gx \left\{ \frac{2\varphi_3(a)}{\pi a} + \int_0^{\infty} \alpha [I_0(\alpha a) - L_0(\alpha a)] A(\alpha) d\alpha \right\}. \quad (13)$$

Ստանդարտացված կոնտրոլային գործակիցի (13) արժեքը կազմում է կրիտիկական արժեքը ($K_{III} = K_c$) ըստ քրոշմի տեսության (6), որտեղ որոշվում է ճեղքի և նրա կայունության մասին:

Институт механики Академии наук Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ն. Ս. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կրիտիկական արժեքի սկսվող ժողովրդական և առաջնային
կրիտիկական արժեքի հակահարթ կոնտրոլային խնդիր

Դիտարկվում է հակահարթ կոնտրոլային խնդիր առաջնային, իզոտրոպ կրիտիկական արժեքի համար, որն ունի եզր դուրս եկող ժողովրդական, վերջավոր ճառագայթային հորիզոնական սահմանի երկու կողմերում, ճառագայթային սկսած ամրակցված են վերջավոր շափերի սիմետրիկ կոշտ դրոշմներ:

Ուշադրություն է դարձվում նաև, որ դրոշմների վրա ազդում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակի հանգեցնող ուժեր:

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով տեղափոխությունների համար։
Շնորհիվ խնդրի շեղահամաչափության, բավական է դիտարկել միայն
քառորդ հարթությունը խառը եզրային պայմաններով։

Խնդրի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով։
Ֆուրյեի ինտեգրալների ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաները որոշելու հա-
մար ստացվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգ՝ Զույգ ին-
տեգրալ հավասարումները լուծվում են օրթոգոնալիզացիայի մեթոդով փակ
տեսքով և ստացված համակարգը բերվում է երկրորդ կարգի Ֆրեդհոլմի տի-
պի ինտեգրալ հավասարման։ Ապացուցված է այդ հավասարման լուծելիու-
թյունը։ Մասնավորապես, լուծումը կարող է գտնվել հաջորդական մոտավո-
րությունների եղանակով։ Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաները որոշելուց հե-
տո կարելի է որոշել լարումները և տեղափոխությունները կիսահարթության
ցանկացած կետում։

Ստացված են ճաքից դուրս լարումների և ճաքի ներսում տեղափոխու-
թյունների որոշման համար բանաձևեր։ Առանձնացված է եզակիությունը և
հաշվարկված է լարումների ինտենսիվության գործակիցը ճաքի գագաթում։

Ըստ նյութի փխրուն քայքայման տեսության լարումների ինտենսիվու-
թյան գործակիցը հավասարեցնելով կրիտիկական արժեքին, ստացված է ար-
տահայտություն ճաքի տարածումը և նրա կայունությունը որոշելու համար։

Մասնավոր դեպքում, երբ ճաքի երկարությունը ձգտում է զրոյի ստաց-
ված է առաձգականության տեսության հակահարթ խնդրի փակ լուծումը
առանց ճաքի կիսահարթության համար։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- 1 В. Новицкий, Теория упругости, Мир, М., 1975. 2 Я. С. Уфлянд, Метод парных уравнений в задачах математической физики. Наука, Л., 1977. 3 В. С. Тоноян, Изв. АН АрмССР Механика, т. 21, № 3 (1968). 4 В. С. Тоноян, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). 5 В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 3, 1972.
6 Г. П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974.