ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 1992 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517 946.8

А. А. Андриян

Граничные задачи в двугранных углах для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно старшей производной

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 12/IV 1991 г.)

Пусть $\pi_\alpha = \{t \mid 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, а $u(x, t) \in C^\infty$ — аналитическая функция по $t \in \pi_\alpha$. Введем класс функций

$$M = \{u(x, t) \mid |D_x^j D_t^k u(x, t)| \leqslant C_{jk} (1 + |x|)^{\beta_{jk}} (1 + |t|)^{1/k}, \quad (x, t) \in R \times \pi_\alpha\}. \tag{1}$$

Если в (1) число $\beta_{jk} = \beta$ не зависит от j, k и u, то соответствующий класс обозначим через M_β, а если более того $u \in M_\beta$ не зависит от t, то соответствующий класс обозначим через N_β.

В двугранной области $R \times \pi_\alpha$ рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{n-j} u(x, t)}{\partial t^{n-j}} = f(x, t), \tag{1}$$

где $a_j(\xi)$ полиномы от ξ с постоянными коэффициентами, причем $a_0(0) = 0$, $a_0(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \neq 0$, $\sum_{j=0}^{n} |a_j(\xi)|^2 \neq 0$ $\forall \xi$; $u \in M$ искомая, а $f \in M_\beta$ — заданная функция. Корни характеристического уравнения

$$P_n(\xi, \lambda) = a_0(\xi) \lambda^n + a_1(\xi) \lambda^{n-1} + \ldots + a_n(\xi) = 0 \tag{3}$$

с учетом их кратностей обозначим через $\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_n(\xi)$.

1. Предположим, что $\lambda_j(\xi) \in \bar{\pi}_\alpha^* = \left\{ t \,\middle|\, \frac{\pi}{2} < \arg t \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha \right\}$ $\forall \xi \neq 0$.

Граничная задача А. Требуется найти решение $u \in M$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$D_t^j u(x, 0) = f_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где $f_j \in N_\beta$ — заданные функции.

Исследование задачи А. Будем следовать схеме в ([1]). Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром ξ:

$$a_0(\xi)\frac{d^n V_j(\xi, t)}{dt^n} + a_1(\xi)\frac{d^{n-1} V_j(\xi, t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(\xi) V_j(\xi, t) = 0, \quad (5)$$

$$D_t^l V_j(\xi, 0) = \delta_j^l, \quad l = 0, \ldots, n-1, \quad (6)$$

где $V_j(\xi, t)$ — аналитична по $t \in \pi$, степенного роста, δ_j^l — символ Кронекера, $j = 0, \ldots, n-1$.

Имеет место

Лемма 1. *Функция $V_j \in C^\infty$ $\forall \xi \neq 0$ и удовлетворяет оценкам*

$$|D_\xi^k D_t^l V_j(\xi, t)| < c_{kl}|\xi|^{-m_{kl}}(1+|\xi|)^{n_{kl}}(1+|t|)^{r_{kl}}, \quad (7)$$

$$m_{kl}, n_{kl}, r_{kl} \geqslant 0.$$

Доказательство. Как известно ([2]), $V_j(\xi, t)$ представляется в виде

$$V_j(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\xi)} \frac{a_0(\xi)\lambda^{n-j-1} + a_1(\xi)\lambda^{n-j-2} + \ldots + a_{n-j-1}(\xi)}{P_n(\xi, \lambda)} \times$$

$$\times \exp(\lambda t)\, d\lambda, \quad \xi \neq 0, \quad (8)$$

где $\gamma(\xi)$ — замкнутый контур, содержащий внутри себя все корни полинома $P_n(\xi, \lambda)$. Пусть $\delta > 0$ такое, что в области $0 < |\xi| < \delta$ кратность корней уравнения (3) постоянна. В области $|\xi| \geqslant \delta$ неравенство (7) доказано в ([3]). В области же $0 < |\xi| < \delta$, вычисляя (8) по теореме о вычетах, получим (7), если вспомнить, что в окрестности точки $\xi = 0$ корень $\lambda_i(\xi)$ разлагается в ряд Пюизе вида

$$\lambda_i(\xi) = \sum_{k=-N_0}^{+\infty} a_{jk}(\xi^{\frac{1}{r_j}})^k, \quad N_0 \geqslant 0, \quad r_j \in N.$$

Пусть $\mu \geqslant 1$ такое, что функция $w_j(\xi, t) = \xi^\mu V_j(\xi, t)$ дифференцируема по ξ достаточное число раз. Тогда для прообраза Фурье $\omega_j(x, t)$ функции $w_j(\xi, t)/(1+\xi^2)^\nu$, $\nu \gg 1$, будем иметь

$$|\omega_j(x, t)| < \text{const}\,\frac{(1+|t|)^{\beta_j}}{(1+|x|)^{\beta+2}}.$$

Частное решение $u_0(x, t)$ задачи A вначале построим, когда правые части в (2) и (4) имеют вид $D_x^\mu f(x, t)$, $D_x^\mu f_j(x)$, $j=0, \ldots, n-1$. Следуя ([1]) это решение запишется в форме

$$u_0(x, t) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(x, t) \underset{(x)}{*} g_j(x) + \int\limits_0^t \omega_{n-1}(x, t-\tau) \underset{(x)}{*} g(x, \tau)\, d\tau, \quad t \in \pi_+,$$

где

$$g_j(x) = \left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^s f_j(x), \qquad g(x, t) = \left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^s f(x, t).$$

Пусть $u_1 \in M$ решение уравнения $D_x^\mu u_1(x, t) = u_0(x, t)$, а $u(x, t)$ — решение задачи A в общем случае, тогда их разность $w(x, t) = u_1(x, t) - u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w(x, t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} a_j(t) x^j \tag{9}$$

и граничным условиям

$$D_t^l w(x, 0) = \sum_{k=0}^{\mu-1} b_k^l x^k, \qquad l = 0, \ldots, n-1. \tag{10}$$

где $a_j(t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1 - f\right)\Big|_{x=1}$, b_k^l — вполне определенные постоянные числа.

Лемма 2. *Однородная задача* (9), (10) *имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий.*

Доказательство. Переходя в (9) и (10) к образам Фурье, нетрудно заметить, что $F[w](\xi)$ сосредоточен в нуле, поэтому

$$w(x, t) = \sum_{j=0}^{N} c_j(t) x^j, \tag{11}$$

где $c_j(t)$ аналитические по $t \in \tau_0$ функции степенного роста.

Подставив $w(x, t)$ из (11) в (9) и (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $c_j(t) \equiv 0$, $j \geq \mu$. Для $c_{\mu-1}(t)$ имеем

$$P_n\left(0, \frac{d}{dt}\right) c_{\mu-1}(t) = a_{\mu-1}(t), \qquad t \in \tau_0, \tag{12}$$

$$D_t^l c_{\mu-1}(0) = b_{\mu-1}^l, \qquad l = 0, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Из $a_0(0) = 0$ следует, что оператор $P_n\left(0, \frac{d}{dt}\right)$ имеет порядок, меньший n, отсюда утверждение леммы 2 (см. лемму 3). Продолжая процесс для $c_{\mu-2}(t), \ldots, c_0(t)$, получим лемму 2.

Таким образом получена

Теорема. *Однородная граничная задача A имеет только тривиальное решение. Для разрешимости неоднородной задачи A необходимо и достаточно, чтобы функции $f(x, t)$, $f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ удовлетворяли конечному числу условий ортогональности.*

Теперь рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения (3) не принадлежат $\bar{\pi}^*_a$ для $\forall \xi \in R$. В этом случае мы покажем, что неоднородное уравнение (2) разрешимо для $\forall f$. Имеет место

Лемма 3. *Уравнение*

$$\frac{du(t)}{dt} - \lambda u(t) = f(t), \qquad t \in \pi_a, \quad \lambda \in \bar{\pi}^*_a, \tag{14}$$

в классе аналитических функций степенного роста имеет единственное решение для $\forall f$.

Лемму 3 нетрудно доказать, интегрируя уравнение (14) стандартным образом, при этом оказывается, что формула решения зависит от положения числа λ. Приведем единую формулу решения в образах Лапласа для $\forall \lambda$. Не ограничивая общность, мы можем считать, что $f^{(j)}(0) = 0$ $\forall j \leqslant r$, r — наперед заданное число, вычитая при необходимости из $f(x)$ полином $f(0) + tf'(0) + \ldots + \frac{t^r}{r!} f^{(r)}_{(0)}(0)$. Пусть $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — преобразования Лапласа граничных значений $f(\rho)$ и $f(\rho \exp(i\alpha))$. Из интегральной теоремы Коши следует

$$F_1(p) = \exp(i\alpha) F_2(\exp(i\alpha)), \qquad \arg p = -\frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Из (15) вытекает, что $F_1(p)$ аналитически продолжается в область $\pi - \bar{\pi}^*_a$ — дополнение к $\bar{\pi}^*_a$. Искомая формула решения уравнения (14) имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\exp(pt)}{p - \lambda} F_1(p)\,dp, \tag{16}$$

где Γ_ε — ломаная с вершиной на действительной оси на расстоянии $\varepsilon > 0$ от начала координат, параллельная границе Γ области π^*_a. Образ Лапласа аналитической функции $g(t) = f(t) \cdot (1 + t^2)^{-q}$, $q \gg 1$ удовлетворяет оценке $|G(p)| \leqslant \text{cte}(1 + |p|)^{-r}$, $p \in \pi - \pi^*_a$. Это позволяет формулу (16) переписать в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} G(p) \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right)^q \left(\frac{\exp(p \cdot t)}{p - \lambda}\right) dp.$$

Рассмотрим функцию

$$q(x, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right)^q \left[\frac{\xi^\mu \exp(-ix\xi + pt)}{P_n(\xi, p)(1 + \xi^2)^k} \right] d\xi,$$

$$k \gg 1, \quad \mu \gg 1, \quad p \in \Gamma.$$

Из оценки $|p - \lambda_j(\xi)| \geqslant \mathrm{cte}\, |\xi|^{-l_j} (1 + |\xi|)^{m_j}$ вытекает

$$|P_n(\xi, p)| \geqslant \mathrm{cte}\, |\xi|^{-l} (1 + |\xi|)^{m}, \quad l \geqslant 0, \quad p \in \Gamma,$$

что в свою очередь приводит к $|q(x, p, t)| \leqslant \mathrm{cte}\,(1 + |t| + |p|)^{\gamma} \times$ $\times (1 + |x|)^{-3-2}$. Окончательно формула решения уравнения (2) в случае правой части $D_x^{\alpha} f(x, t)$ принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} q(x, p, t) \underset{(x)}{*} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k} Q(x, p)\, dp,$$

где $Q(x, p)$ — образ Лапласа функции $\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{k} D_x^{\alpha} f(x, t) \times$ $\times (1 + t^2)^{-q}$.

В случае произвольной правой части в (2) вопрос разрешимости, как и выше, сводится к разрешимости уравнения вида

$$P_n\left(0, \frac{d}{dt}\right) v(t) = a(t),$$

которое, в силу леммы 3, имеет единственное решение.

Замечание. Если предположить, что хотя бы один корень характеристического уравнения $P_n(0, \lambda) = 0$ лежит в области $\overline{\pi}^{+}_{s}$, то в этом случае неоднородное уравнение (2) разрешимо, а однородное уравнение допускает бесконечно много линейно независимых решений. Положение можно исправить, например, следующим образом. Пусть k — кратность нуля многочлена $a_0(\xi)$. Правую часть в (2) предположим из класса M_β с $\beta < 0$, а решение $u(x, t)$ будем искать в классе M_k. Тогда можно доказать, что неоднородное уравнение (2) всегда имеет решение, а однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений. Отметим также, что общий случай оператора $P_n\left(i \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, когда часть корней характеристического уравнения (3) лежит в $\overline{\pi}^{+}_{s}$ $\forall \xi \neq 0$, а другая часть лежит вне $\overline{\pi}^{+}_{s}$, может быть исследована сведением к композиции рассмотренных случаев.

В заключение отметим, что аналогичные результаты справедливы и для системы вида

$$A\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = B\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f,$$

где $A(\xi)$, $B(\xi)$ — квадратные полиномиальные матрицы с постоянными коэффициентами в предположении, что $\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) \not\equiv 0\ \forall \xi$.

3. В качестве иллюстрации результата из пункта 1 приведем пример. Во введенных классах функций рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) - u(x, t) = f(t), \qquad (17)$$

для которого $\lambda(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$ принадлежит π_α^* $\forall \xi \neq 0$. Начальное условие (4) возьмем в виде $u(x, 0) = 0$. Начальное условие и уравнение (17) после применения преобразования Фурье примут вид

$$-\xi^2 \frac{d}{dt}\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}(\xi, t) = f(t)\,\delta(\xi), \qquad \hat{u}(\xi, 0) = 0,$$

откуда легко выводится, что $\hat{u}(\xi, t) = 0 \, \forall \xi \neq 0$. Тем самым $\hat{u}(\xi, t)$ сосредоточен в нуле и потому имеет вид $\hat{u}(\xi, t) = \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha(t)\,\delta^{(\alpha)}(\xi)$. Отсюда $u(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha(t)\,(ix)^\alpha$; подставив это в уравнение (17), легко получить $u(x, t) = -f(t)$. Таким образом, для корректности рассмотренного примера необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$.

Ереванский политехнический институт

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ

Եզրային խնդիրներ երկնիստ անկյուններում բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ չլուծված մասնակի ածանցյալներով հավասարման համար

Դիցուք $\pi_\alpha = \{t \mid 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$, $\pi_\alpha^* = \left\{t \,\middle|\, \frac{\pi}{2} \leq \arg t \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\right\}$, անալիտիկ է ըստ $t \in \pi_\alpha$ և անվերջում աճում է դանդաղ. $R \times \pi_\alpha$ տիրույթում դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j} u(x, t)}{\partial t^{n-j}} = f(x, t), \qquad (1)$$

որտեղ $a_j(\xi)$ — հաստատուն գործակիցներով բազմանդամ է ξ-ից,

$$a_0(0) = 0, \quad a_0(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \neq 0, \quad \sum_{j=0}^{n} |a_j(\xi)|^2 \neq 0 \ \forall \xi \in R.$$

Ենթադրելով, որ $\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_m(\xi) \in \pi_\alpha^*$ $\forall \xi \neq 0$, իսկ $\lambda_{m+1}(\xi), \ldots, \lambda_n(\xi) \overline{\in} \pi_\alpha^*$ $\forall \xi \neq 0$, որտեղ $\lambda_j(\xi)$ (1) հավասարման բնութագրիչ արմատն է, (1) հավասարման համար դիտարկվում է Կոշու տիպի խնդիր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Мизохата*, Теория уравнений с частными производными, Мир, М., 1977. [2] *В. А. Солонников*, Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 83, Наука, М. (1965). [3] *А. А. Андрян*, Расширенные заседания семинара им. И. Н. Векуа, Тбилиси, 1990.