ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 93 1992 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

А. С. Саргсян

Функции Лебега и расходимость рядов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 27/III 1991)

В вопросах изучения сходимости и расходимости рядов Фурье по ортонормальным системам (ОНС) важную роль играют функции Лебега, определяемые следующим образом:

$$L_n(x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Эти функции были введены А. Лебегом (см. [1], с. 86–88), который исследовал их влияние на расходимость рядов Фурье

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \qquad C_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x)\, dx. \tag{2}$$

Хорошо известен результат С. Качмажа [2] о том, что если для некоторой ОНС $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место следующее условие:

$$L_n(x) < C, \quad x \in G, \quad G \subset [0, 1], \quad |G| > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

то для произвольной функции из $L^2[0,1]$ ее ряд Фурье по системе Φ сходится почти всюду на множестве G.

В частности, если выполнено условие

$$L_n(x) < C, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

то система Φ является системой сходимости.

Обеспечивает ли условие (4) сходимость почти всюду рядов Фурье из $L^p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < 2)$?

Отрицательный ответ на данный вопрос был дан А. М. Олевским [3].

Теорема А (А. М. Олевский). *Существует полная в* $L[0, 1]$ *ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *имеющая равномерно ограниченные функции Лебега, причем ряд Фурье* (2) *некоторой функции* $f(x) \in L^p[0, 1]$ $(1 < p < 2)$ *расходится почти всюду на множестве* $[0, 1]$.

В работе ([4]) была построена полная ОНС (ПОНС), состоящая из непрерывных функций, для которых имеет место теорема А (см. также ([5])).

В 1961 г. П. Л. Ульяновым (см. ([6]), с. 698; ([7]), с. 140) была поставлена проблема: „если $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ОНС, удовлетворяющая следующему условию

$$\|\varphi_n\|_{\infty} \leqslant M, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то не справедливо ли равенство

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} L_n(x) = \infty$$

для некоторых $x \in [0, 1]$ или $x \in E$, $|E| > 0$?"

В 1966 г. А. М. Олевский (см. ([8]) решил поставленную выше проблему. Им же была построена (см. ([9])), с. 18–19) ПОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет условию (5), и функции Лебега этой системы равномерно ограничены на множестве положительной меры.

Возникает вопрос, если система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (3) и (5), то следует ли из этого сходимость почти всюду на множестве G рядов Фурье из $L^p[0, 1]$, $1 < p < 2$?

С помощью приема, примененного К. С. Казаряном ([10]), строится ПОНС, для которой справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть G измеримое множество положительной меры, $0 < |G| < 1$. Тогда существует ПОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (5), такая, что функции Лебега этой системы равномерно ограничены на множестве G, и существует функция $f(x) \in L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p < 2$, такая, что ее ряд Фурье по данной системе расходится почти всюду.*

Ереванский государственный университет

Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Լեբեգի ֆունկցիաները և Ֆուրյեի շարքերի տարամիտությունը

Կառուցված է լրիվ օրթոնորմավորված ֆունկցիաների $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգ, որի համար ճիշտ է հետևյալ թեորեմը

Թեորեմ 1. Φ համակարգի համար տեղի ունեն (3) և (5) պայմանները և գոյություն ունի $f(x) \in L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p < 2$, որի Ֆուրյեի շարքը ըստ Φ համակարգի համարյա ամենուրեք տարամետ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Lebesque*, Leçons sur les series „trigonometriques". Paris, 1906. [2] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*, Теория ортогональных рядов, Гостехиздат, М., 1958. [3] *А. М. Олевский*, Мат. сб., т. 71 (113), с. 297—336 (1966). [4] *К. С. Казарян, А. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. 83, № 5 (1986). [5] *R. E. Zink*, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 97, № 1, MAY (1986). [6] *П. Л. Ульянов*, Тр. всесоюзн. мат. съезда, т. 2, Наука, Л., 1964. [7] *П. Л. Ульянов*, УМН, т. 16, № 3, с. 61—42 (1961). [8] *А. М. Олевский*, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 30, № 2, с. 387—432 (1966). [9] *A. M. Olevskii*, Fourier series with respect to general orthogonal systems, Springer-Verlag, 1975. [10] *К. С. Казарян*, Мат. сб. 119 (161), № 2 (10) (1982).