ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 5

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62.50

Р. Е. Саркисян

Адаптивные процедуры и концепция согласования предпочтений

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Терзяном 23/IV 1991)

Среди человеко-машинных методов решения практических многокритериальных задач, какими являются задачи проектирования и планирования развития сложных технических, экономических и организационных систем, адаптивные методы отличаются той характерной особенностью, что в них процесс осмысления соотношений между потребностями и возможностями их удовлетворения объектом оптимизации проходит последовательно, сопровождаясь двумя видами адаптации: человека (лица, принимающего решения) к задаче и ЭВМ к системе предпочтений человека [1].

Эффективность этого процесса существенно зависит от того, насколько представленные в неформальной информации желания и предпочтения согласованы с реальными возможностями и ограничениями модели, каковыми, например, являются параметрические, функциональные и критериальные ограничения.

Учет согласованности для управления процессом диалога в известном смысле является интерпретацией практического руководящего принципа согласования желаний и предпочтений с ограничениями окружения применительно к проблеме многокритериальности, который своими корнями связан с этической системой стоицизма и широко применяется в системотехнике [2]. Практическая его реализация в человеко-машинных процедурах обусловлена возможностью интерпретации представленных в неформальной информации субъективных суждений через связи и соотношения между параметрами и переменными модели.

В данной статье обсуждаются результаты исследования этой проблемы, когда неформальная информация отражает субъективные суждения об относительной важности критериев и условий замещения между возможными изменениями их значений.

Пусть модель оптимизируемого объекта представлена множеством допустимых решений $D_x \subset E^n$ и совокупностью определенных на D_x непрерывно дифференцируемых критериальных функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что на множестве оценок $F = \{f \in E^m / f = f(x),\ x \in D_x\}$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, задано совершенное отношение предпочтения P, удовлетворяющее условиям непрерывности и монотонности*. Известно ([3]), что эти условия достаточны для существования непрерывной монотонно возрастающей функции полезности $u : E^m \to E^1$, описывающей P.

В адаптивных процедурах максимальное уменьшение неопределенности и несравнимости между альтернативными вариантами решений в процессе диалога достигается в результате уточнения относительной важности критериев, выявления условий независимости по полезности, установления замещений между возможными изменениями значений критериев ([4]). Вся эта информация как результат субъективного восприятия решаемой проблемы, естественно, тесно связана с функцией глобальной полезности $u(f(x))$.

Важность критериев обычно определяется степенью влияния изменения их значений на общее «качество» (полезность) исходов, и так как это влияние можно оценить лишь соизмеряя его с влиянием других критериев, то речь идет об относительной их важности ([5]). Формально эту меру для критериев f_i и f_{j_k} можно определить в виде

$$\mu_{ij_k} = (\partial u/\partial f_i)/(\partial u/\partial f_{j_k}), \qquad i = 1, \ldots, m; \quad i \neq j_k, \tag{1}$$

где частные производные определяются в точке $x^k \in D_x$ (или, что одно и то же, в точке $f^k = f(x^k) \in E^m$). f_{j_k} — один из критериев, выбранный в качестве опорного (например наиболее важный критерий в состоянии x^k). Отношения (1) известны как маргинальные (или предельные) отношения замещения между критериями f_i и f_{j_k}. В известных процедурах градиентного типа с помощью μ_{ij_k}, $i = 1, \ldots, m$, оценивается градиент $\nabla_x u = \sum_i (\partial u/\partial f_i) \cdot \nabla_x f_i(x^k)$, точнее, коллинеарный ему вектор $\nabla_x u/(\partial u/\partial f_{j_k})$, где $\nabla_x f_i(x^k)$ — градиент функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$.

В ([6]) обсуждались два пути приближенной оценки μ_{ij_k} путем аппроксимации отношений дифференциалов конечно-разностными их аналогами $(\Delta u/\Delta f_i)/(\Delta u/f_{j_k})$. Один из них связан с выявлением разум-

---

* Отношение P называется непрерывным, если множества $\{f \in E^m / fP\varphi\}$ и $\{f \in E^m / \varphi P f\}$ замкнуты для любого $\varphi \in E^m$. Отношение P монотонно (по отношению к квазипорядку $\leqslant$) на E^m, если $f < \varphi \Rightarrow f \prec \varphi$, где $\prec$ — отношение (строгого) предпочтения.

ных замещений Δf_i и Δf_{j_k} для критериев f_i и f_{j_k}. Тогда $\mu_{ij_k} \simeq$ $\simeq -\Delta f_{j_k}/\Delta f_i$. Второй путь исходит из установления „идеальных" пропорций δf_i и δf_{j_k} между возможными изменениями критериев и предположении, что функция полезности возрастает наиболее быстро, если при изменении критерия f_i на δf_i единиц критерий f_{j_k} изменяется на δf_{j_k} единиц. В этом случае $\mu_{ij_k} \sim \delta f_i / \delta f_{j_k}$. Оба подхода тесно взаимосвязаны и отражают условие перпендикулярности градиента $\nabla_f u$ гиперплоскости, касательной к поверхности $u = \text{const}$ в точке $f = f^k$.

Пусть $e = \nabla_x u / \|\nabla_x u\|$ и существует $\delta > 0$ такой, что $x^k + \sigma e \in D_x$, $\sigma \in (0, \delta)$. Тогда для достаточно малого $\sigma > 0$ величина δf_i может быть представлена в виде разности $\delta f_i = f_i(x^k + \sigma e) - f_i(x^k)$, $i = 1, \ldots, m$. В (7) доказано, что такое представление приводит для μ_{ij_k} к выражению

$$\mu_{ij_k} = f_i'(x^k; \sigma e)/f_{j_k}'(x^k; \sigma e), \quad i = 1, \ldots, m; \quad i \neq j_k, \tag{2}$$

где $f_i'(x^k; \sigma e) = df_i(x^k)/de$ — производные функции $f_i(x)$ по направлению e, $i = 1, \ldots, m$. Для непрерывно дифференцируемых функций имеет место соотношение $f_i'(x^k; \sigma e) = \nabla_x f_i(x^k)^T e$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому для этого случая отношения (2) принимают вид

$$\mu_{ij_k} = \nabla_x f_i(x^k)^T e / \nabla_x f_{j_k}(x^k)^T e, \quad i = 1, \ldots, m; \quad i \neq j_k. \tag{3}$$

Это соотношение показывает, как сильно взаимосвязаны друг с другом величины μ_{ij_k}, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq j_k$, и как трудно осуществить точечное их оценивание с помощью неформальной информации. В этом отношении более конструктивно их интервальное оценивание (8). Пусть величина Δf_{j_k} такова, что разность полезностей оценок $(f_1, \ldots, f_{j_k}, \ldots, f_m)^T$ и $(f_1, \ldots, f_{j_k} + \Delta f_{j_k}, \ldots, f_m)^T$ в состоянии $f^k \in F$ не вызывает сомнения. Теперь на шкале критерия f_i выберем два приращения $0 < \Delta f_{i1} < \Delta f_{i2}$ такие, что оценка $(f_1, \ldots, f_i + \Delta f_{i1}, \ldots, f_m)^T$ будет менее предпочтительна, а $(f_1, \ldots, f_i + \Delta f_{i2}, \ldots, f_m)^T$ — более предпочтительна, чем $(f_1, \ldots, f_{j_k} + \Delta f_{j_k}, \ldots, f_m)^T$, $f_i = f_i^k$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда для величин μ_{ij_k} (или конечно-разностных их аналогов $(\Delta u/\Delta f_i)/(\Delta u/\Delta f_{j_k})$) получаем двусторонюю оценку

$$\Delta f_{j_k}/\Delta f_{i2} < \mu_{ij_k} < \Delta f_{j_k}/\Delta f_{i1}. \tag{4}$$

Обозначив $A_i = \Delta f_{j_k}/\Delta f_{i2}$, $B_i = \Delta f_{j_k}/\Delta f_{i1}$, из (3) и (4) получим

$$\nabla_x f_i(x^k)^T e / \nabla_x f_{j_k}(x^k)^T e \in [A_i, B_i], \tag{5}$$

$$i = 1, \ldots, m; \quad i \neq j_k.$$

Выражение (5) описывает конус желательных направлений

$$P_0 = \{d \in E^n / \nabla_x f_i(x^k)^T d / \nabla_x f_{j_k}(x^k)^T d \in [A_i, B_i], \forall i\}, \tag{6}$$

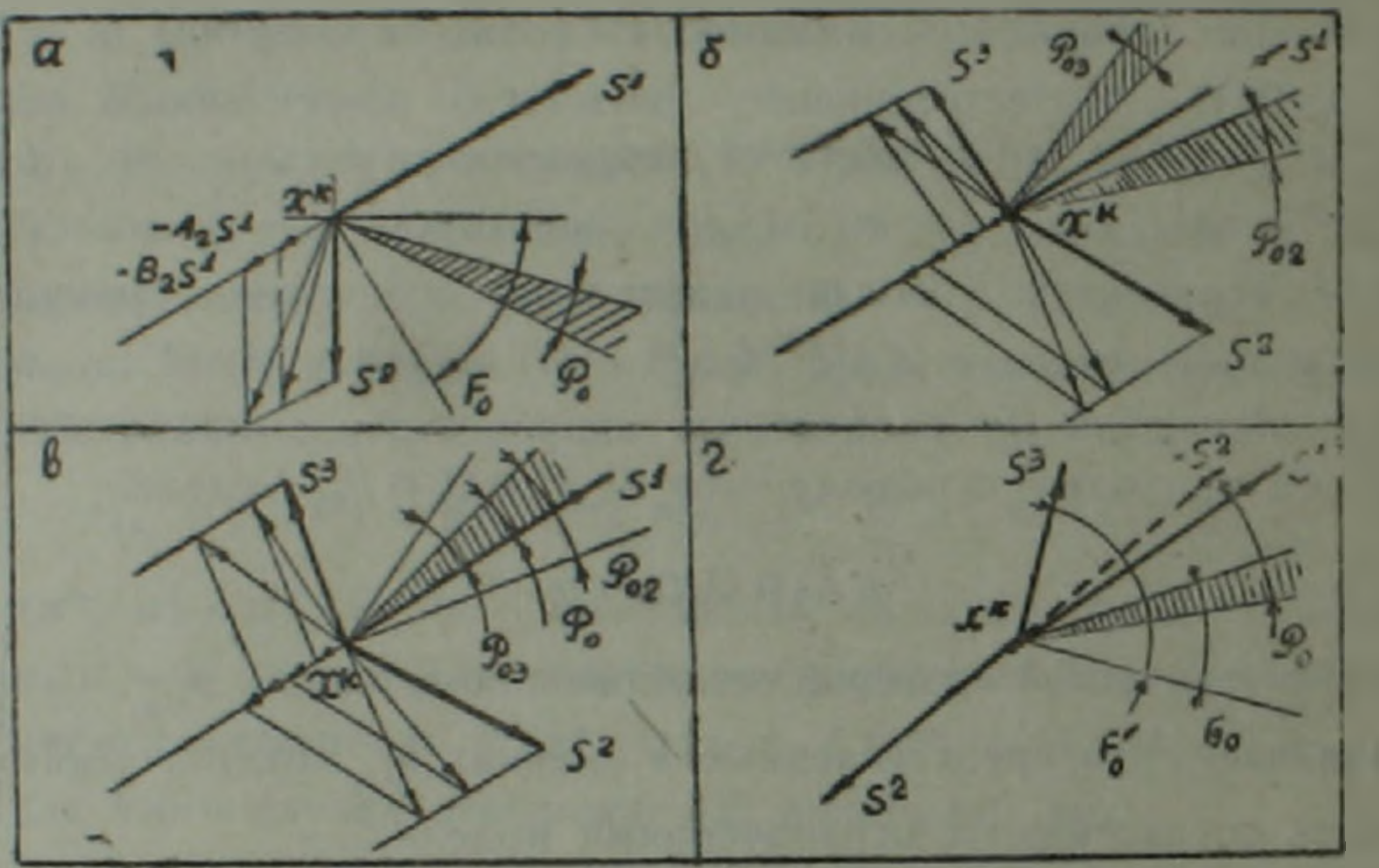
называемый конусом предпочтений, который содержит оцениваемый вектор $e = \nabla_x u / \|\nabla_x u\|$. Вопрос согласования этой оценки с ограничениями модели можно выяснить, исходя из следующих соображений. Пусть интервалы $[A_i, B_i]$, $i = 1, \ldots, m$, оценены с помощью неформальной информации. Пусть, далее, $\pi(F) = \{f \in F / \varphi \in F \wedge \varphi \geq f \Rightarrow \varphi = f\}$ — эффективная граница множества F (область Парето) и $\pi(D_x) = f^{-1}(\pi(F))$ — соответствующее множество эффективных решений. Если $x^k \notin \pi(D_x)$, то существует направление d такое, что $f_i(x^k) < f_i(x^k + \varepsilon d)$, $i = 1, \ldots, m$, и для некоторого $i = i_0$ имеет место строгое неравенство. Тогда направление e должно принадлежать также множеству $F_0 = \{d \in E^n / f_i(x^k + \varepsilon d) > f_i(x^k), \; i = 1, \ldots, m\}$. Наконец, обозначив Q_0 коническую аппроксимацию множества D_x в точке x^k, приходим к выводу, что $e \in F_0 \cap Q_0 \cap P_0$. Условие

$$F_0 \cap Q_0 \cap P_0 \neq \varnothing \tag{7}$$

есть геометрический критерий согласованности оценок μ_{ij_k}, $i = 1, \ldots, m$. (7) означает, что представленные в оценках μ_{ij_k} предпочтения должны быть согласованы с ограничениями модели.

Если $x^k \in \operatorname{int} D_x$, где $\operatorname{int} D_x$ — внутренность D_x, то этот критерий принимает более простой вид, а именно $F_0 \cap P_0 \neq \varnothing$. Обозначим $\alpha_i = |S^i| / |S^{j_k}|$, $\cos\theta_i = S^{iT} e / |S^i|\,|e|$, $\cos\theta_{ij_k} = S^{iT} S^{j_k} / |S^i| \cdot |S^{j_k}|$, где $S^i = \nabla_x f_i(x^k)$, θ_i — угол между векторами S^i и e, а θ_{ij_k} угол между векторами S^i и S^{j_k}, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq j_k$. При $\theta_{ij_k} \to 0$ разность $\theta_i - \theta_{j_k}$ также стремится к нулю и при этом $\mu_{ij_k} \to \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$. Для μ_{ij_k} такой же эффект мы обнаруживаем при $\theta_{ij_k} \to \pi$. Следовательно, есть определенная связь между предпочтениями относительно замещений Δf_i и Δf_{j_k} или „идеальных" пропорций δf_i и δf_{j_k} и взаимным расположением векторов S^i и S^{j_k}. С другой стороны, эта связь также означает, что относительная важность критериев зависит не только от состояния f^k, но и от производных критериальных функций и от взаимного расположения градиентов. При $A_i \to 0$ и $B_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, m$, конусы F_0 и P_0 сливаются. Если фиксировать A_i и увеличить B_i, конус P_0 наклоняется в сторону направления, перпендикулярного вектору S^{j_k} (возрастание роли критерия f_i), а если фиксировать B_i и уменьшить A_i, тогда конус P_0 наклоняется в сторону вектора, перпендикулярного S^i (уменьшение роли f_i).

Если есть основание полагать, что многокритериальная задача может быть заменена лексикографической задачей, то выбирая в качестве опорного критерия наиболее важный из них, получим $e = S^{j_k}/|S^{j_k}|$. Тогда $\mu_{i/j_k} = a_i \cos \theta_{ij_k}$, $i = 1, \ldots, m$; $i \neq j_k$ и предпочтения будут моделироваться величиной $a_i = |S^i|/|S^{j_k}|$ и взаимным расположением векторов S^i и S^{j_k}, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq j_k$.



На рисунке, *а* изображен случай, когда $m = n = 2$, $S^{j_k} = S^1$, $x^k \in \operatorname{int} D_x$. Конус P_0 задается с помощью двух ограничений $(S^2 - A_2 \cdot S^1)^T e \geqslant 0$ и $(S^2 - B_2 \cdot S^2)^T e < 0$. Для любых A_2, B_2 имеет место $P_0 \subset F_0$. Для трех- и более критериальной задачи картина полностью меняется. На рисунке, *б* изображен случай несогласованного ($P_0 = \varnothing$), а *в* — согласованного ($P_0 \neq \varnothing$) оценивания величин μ_{21} и μ_{31}. Когда x^k принадлежит границе множества D_x, согласованное оценивание ($F_0 \cap G_0 \cap P_0 \neq \varnothing$) становится весьма ответственной задачей.

Наконец, когда $x^k \in \pi(D_x)$ и это решение признается приемлемым, то исходная задача решена. В противном случае предпочтительное направление e уже будет принадлежать множеству $F_0' \cap Q_0 \cap P_0$, где множество

$$F_0' = \{d \in E^n / f_i(x^k + \alpha d) \geqslant f_i(x^k),\ i \in R_1\}, \quad R_1 \subset \{1, \ldots, m\}, \tag{8}$$

представляет ту часть критериев, значение которых не должно уменьшаться при движении вдоль направления e. При оценке величин μ_{i/j_k}, $i \in R_1$ градиенты S^i должны быть заменены антиградиентами $-S^i$. Механизмы согласованного оценивания при этом остаются без изменения. Этот случай изображен на рисунке, *г* для $m = 3$,

$K_1 = \{1, 3\}$. На нем показано также возможное расположение множеств F_0, P_0 и Q_0, при котором $F_0 \cap Q_0 \cap P_0 \neq \varnothing$.

Резюмируя, отметим следующее. В человеко-машинных процедурах адаптивного типа для согласования неформальной информации с возможностями и ограничениями модели необходимо чтобы представленные в ней субъективные суждения были интерпретированы в терминах связей и отношений между компонентами модели. В случае оценки замещений такими параметрами являются производные критериальных функций по направлению и отношения между ними. Интервальное их оценивание позволяет наметить конструктивные пути построения формализованных процедур для решения широкого круга прикладных многокритериальных задач, связанных с проектированием и управлением в технических и организационных системах.

Ереванский политехнический институт

Ռ. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ադապտիվ ընթացակարգեր և նախապատվությունների համաձայնեցման կոնցեպցիան

Հիմնավորված է բազմաչափանիշային օպտիմիզացիայի գործնական խնդիրներում օբյեկտիվ մոդելների հնարավորությունների և սահմանափակումների հետ նախապատվությունների համակարգերի համաձայնեցման կոնցեպցիան և բացահայտված են ադապտիվ բնույթի երկխոսության ընթացակարգերում այն կիրառելու գործնական մեխանիզմներ՝ կապված փոխարինումների սահմանային հարաբերությունների և չափանիշային ֆունկցիաների ըստ ուղղության ածանցյալների հարաբերությունների միջև եղած առնչությունների հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Растригин, Я. Ю. Эйдук.* Автоматика и телемеханика. № 1, с. 5—26 (1985). [2] *А. Холл.* Опыт методологии для системотехники. М. Советское радио, 1975. [3] *Г. Фандель, И. Вильгельм,* в кн.: Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений, Статистика, М., с. 96—122, 1979. [4] *Б. Руа,* в кн.: ([3]), с. 123—167. [5] Современное состояние теории исследования операций. Наука, М., 1979. [6] *А. Джеффрион, А. Зойср,* в кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений, МИР, М., с. 126—145, (1976). [7] *Р. Е. Саркисян.* Информатика. Сер. прикладные проблемы. Вопр. теории [illegible], вып. 1, с. 102—11[illegible] (1990). [8] *Б. Руа,* в кн.: ([6]), с. 20—58.