ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 | 1991 | № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

Д. Т. Багдасарян, член-корреспондент АН Армении В. С. Захарян

О росте аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом типа Дирихле

(Представлено 18/III 1991)

1. Обозначим через Ω^0 класс функций $\omega(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\omega(t)\uparrow\infty$ при $t\to 1$;

2) $\int\limits_0^1 \omega(t)\,dt<+\infty$.

Для любой функции $\omega(t)\in\Omega^0$ положим

$$h(x)=\int\limits_x^1 \omega(t)\,dt, \qquad 0\leqslant x<1. \tag{1}$$

Для аналитических в единичном круге $U=\{|z|<1\}$ функций $f(z)=\sum a_n z^n$ обозначим

$$\overline{M}(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n; \qquad M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \qquad (0<r<1).$$

Будем говорить, что аналитическая в единичном круге U функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $f(0)=0$, принадлежит классу $D_2(\omega)$ при $\omega(x)\in\Omega^0$, если

$$\iint\limits_U h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\theta})|^2\rho\,d\rho\,d\theta<+\infty. \tag{2}$$

Через Ω_0 обозначим класс функций $\varphi(t)\geqslant 0$, монотонно стремящихся к нулю при $t\downarrow 0$, имеющих производные функции $\varphi'(t)$, удовлетворяющие условиям: $\varphi'(t)\uparrow+\infty$ при $t\downarrow 0$ и

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t\varphi'(t)}=C \qquad (\neq 0,\ \infty). \tag{3}$$

Очевидно, что если $\varphi(t) \in \Omega_0$, то $\varphi'(t) \in \Omega^0$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Существенность ограничения, связанного с выполнением условия (3), очевидна: условие (3), например, выполняется для функций

$$\varphi(t) = t^\alpha \quad (0 < \alpha < 1), \qquad \varphi(t) = t^\alpha \log\frac{1}{t} \quad (0 < \alpha < 1),$$

но легко видеть, что оно нарушено в случае функции

$$\varphi(t) = \left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\alpha} \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

Через D_h обозначим класс функций $f(z)$, аналитических в U и таких, что при $h(x) \in \Omega_0$

$$\iint_U h(1-r)\,|f'(re^{i\varphi})|^2\, r dr d\varphi < +\infty.$$

Из определений классов D_h и $D(\omega)$ ясно, что

$$D_h \subset D_2(\omega).$$

В работе [1] дана оценка роста функции $f(z) \in D_h$.

В настоящей заметке оценен рост функции $f(z)$, принадлежащей более широкому классу $D_2(\omega)$. Получаемые оценки совпадают с оценками функций из класса D_h. Для их справедливости дополнительное условие (3) на функцию не требуется.

2. Условие (2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 h(\rho)\,d\rho \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \rho^{2n-1}\, d\rho =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, W_\omega(n),$$

где

$$W_\omega(n) = n^2 \int_0^1 h(\rho)\,\rho^{2n-1}\, d\rho = \frac{n}{2}\int_0^1 \omega(x)\, x^{2n} dx.$$

В работе [2] (лемма 2.1) доказано, что

$$C_1 W_\omega(n) \leqslant n \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \omega(x)\, dx \leqslant C_2 W_\omega(n).$$

Следовательно, условие (2) равносильно следующему условию:

$$f(z) \in D_2(\omega) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, n h\left(1 - \frac{1}{n}\right) < +\infty. \qquad (4)$$

По аналогии с леммой 2 работы [1] докажем следующее утверждение, которое оказывается справедливым и без условия (3).

Лемма 1. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega^0$, $h(x) = \int_x^1 \omega(t)\,dt$, $0 \leqslant p < 1$ *и*

$$G_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\left[h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p}. \tag{5}$$

Тогда при $\rho \to 1$ *имеет место оценка*

$$G_p(\rho) = O\left(\frac{1}{(1-\rho)\,|h(\rho)|^p}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Так как при $\omega(x) \in \Omega^0$ функция $(1-x)^{-1}h(x)$ монотонно возрастает при $x \uparrow 1$, то мы можем написать:

$$G_p(\rho) = \sum_{n<\frac{1}{1-\rho}} \frac{\rho^n}{\left[h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p} + \sum_{n>\frac{1}{1-\rho}} \frac{n^p\rho^n}{\left|nh\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|^p} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Имеем

$$\Sigma_1 < \frac{1}{[h(\rho)]^p} \sum_{n<\frac{1}{1-\rho}} \rho^n < \frac{1}{[h(\rho)]^p} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{(1-\rho)\,[h(\rho)]^p}. \tag{7}$$

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{(1-\rho)^p}{|h(\rho)|^p} \sum_{n>\frac{1}{1-\rho}} n^p\rho^n < \frac{(1-\rho)^p}{|h(\rho)|^p} \sum_{n=1}^{\infty} n^p\rho^n \sim \frac{1}{(1-\rho)\,|h(\rho)|^p}. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$G_p(\rho) \geqslant \sum_{n>\frac{1}{1-\rho}} \frac{\rho^n}{|h(\rho)|^p} = \frac{1}{|h(\rho)|^p}\,\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho},$$

где N удовлетворяет условиям $N \leqslant \frac{1}{1-\rho}$, $N+1 > \frac{1}{1-\rho}$, $\rho^{N+1} > \rho^{\frac{1}{1-\rho}+1} \to \frac{1}{e}$ при $\rho \to 1$. Следовательно, при ρ, достаточно близких к 1,

$$G_p(\rho) \geqslant \frac{\mathrm{const}}{(1-\rho)\,[h(\rho)]^p}. \tag{9}$$

Отсюда и из (7), (8) получаем (6).

Следствие. *Обозначим*

$$Q_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\left|h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|^p}.$$

При $\rho \to 1-0$ *имеет место*

$$Q_p(\rho) = O\left(\int_0^{\rho} \frac{dt}{(1-t)[h(t)]^p}\right). \tag{10}$$

В частном случае при $p=1$ *получается*

$$Q_1(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{nh\left(1-\frac{1}{n}\right)} = O\left(\int_0^{\rho} \frac{dt}{(1-t)h(t)}\right). \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть* $f(z) \in D_2(\omega)$, *где* $\omega(x) \in \Omega^0$ *и*

$$h(x) = \int_x^1 \omega(t)\, dt.$$

Тогда

$$\lim_{r\to 1} \overline{M}(r, f)[Q_1(r^2)]^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

где

$$Q_1(r) = O\left(\int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(t)}\right).$$

Доказательство для класса $D_2(\omega)$ если опираться на лемму 1, не отличается от доказательства соответствующей теоремы для класса D_h.

Докажем теперь, что для класса $D_2(\omega)$ величина $1/2$ в теореме 1 (как и для класса D_l в ([1])) является наилучшим возможным значением.

Теорема 2. *Для любой константы* p, *удовлетворяющей условию* $0 < p < \frac{1}{2}$ *в* U, *существует функция* $\varphi(z) \in D_2(\omega)$, $\omega(x) \in \Omega$ *такая, что*

$$\lim_{r\to 1} \inf M(r, f)[Q_1(r^2)]^{-p} \geqslant 1. \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\left[h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p}. \tag{13}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 nh\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{1-2p}.$$

Если выберем функцию $\omega(x) \in \Omega^0$ такой, что $\omega(x) < \frac{1}{(1-x)^{C_1}}$, где $0 < C_1 < 1$, то получаем

$$h\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{C_1}} = \frac{1}{1-C_1} \frac{1}{n^{1-C_1}}.$$

Так что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 nh\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1-C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+(1-C_1)(1-2/p)}} < +\infty.$$

Следовательно, согласно (4) $\varphi(z) \in D_2(\omega)$.

Далее

$$M(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n\left|h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|^p} = O\left(\int_0^r \frac{dt}{(1-t)[h(t)]^p}\right).$$

Так как $(1-x)^{-1} h(x) \uparrow$ при $x \uparrow 1$, мы получим

$$\lim_{r\to 1} M(r, \varphi)[Q_1(r^2)]^{-p} \geqslant C \lim_{r\to 1} \int_0^r \frac{dt}{(1-t)|h(t)|^p} \left(\int_0^{r^2} \frac{dt}{(1-t)h(t)}\right)^{-p} =$$

$$= C \lim_{r\to 1} \int_0^r \frac{|h(t)|^{1-p}}{(1-t)h(t)} dt \left(\int_0^{r^2} \frac{dt}{(1-t)h(t)}\right)^{-p} \geqslant$$

$$\geqslant C \lim_{r\to 1} \left[h(r) \int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(t)}\right]^{1-p} = C \lim_{r\to 1} \left[h(r) \int_0^r \frac{dt}{(1-t)^2 \frac{h(t)}{1-t}}\right]^{1-p} \geqslant$$

$$\geqslant C \lim_{r\to 1} \left|(1-r) \int_0^r \frac{dt}{(1-t)^2}\right|^{1-p} \to C,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Ереванский политехнический институт

Գ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ. Հայաստանի ԳԱ թղթակից անդամ Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Շրջանում անալիտիկ Դիրիխլեի տիպի վերջավոր ինտեգրալով ֆունկցիաների աճի մասին

Նշանակենք Ω-ով $[0, 1)$-ում դրական անընդհատ այն ֆունկցիաների դասը, որոնց համար տեղի ունի՝

1) $\omega(t) \uparrow \infty$, երբ $t \to 1$,

2) $\int_0^1 \omega(t)\,dt < \infty$

$\omega(t) \in \Omega$ համար նշանակենք

$$h(x) = \int_x^1 \omega(t)\,dt:$$

Կասենք $f(z) \in D_2(\omega)$, եթե

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\vartheta})|\,\rho\,d\rho\,d\vartheta < +\infty.$$

Հոդվածում ստացված է $D_2(\omega)$ դասի ֆունկցիաների աճի գնահատականը։ Այդ գնահատականը ([1])-ում ստացված էր $f(z) \in S_h$ ֆունկցիաների համար, որտեղ S_h-ը էապես ընկած է $D_2(\omega)$ դասի մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Захарян, Д. Т. Багдасарян*, ДАН АрмССР, т. 81, № 5, с. 200—204 (1985).
[2] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 39, № 6, 1262—1339 (1970).