Том 92 1991 № 4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.217.519.24

В. К. Брутян

Синтез адаптивного фильтра непрерывных марковских систем в условиях неопределенности

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 17/IV 1991)

Введение. В непрерывных марковских системах (МС) в настоящее время широкий класс задач формулируется следующим образом. Пусть символ $Y_t \stackrel{\Delta}{=} \{y(\tau, \omega),\ \tau \in I_t \stackrel{\Delta}{=} [t_0, t)\}$ обозначает реализацию m-мерного наблюдаемого марковского процесса $y(t, \omega)$, который представляется с помощью стохастического дифференциального уравнения Ито [1, 2]

$$\partial y(t, \omega) = H(t)x(t, \omega)\partial t + \partial\eta(t, \omega), \qquad y(t_0, \omega) = y_0(\omega),$$

причем $H(t)x(t, \omega)$ считается выходом МС, описываемой уравнением

$$\partial x(t, \omega) = A(t)x(t, \omega)\partial t + G(t)\partial\xi(t, \omega), \qquad x(t_0, \omega) = x_0(\omega). \quad (1)$$

Здесь $x(t, \omega)$ — n-мерный вектор состояния (в. с.) МС, ω — общая точка вероятностного пространства, $\xi(t, \omega)$, $\eta(t, \omega)$ — n и m-мерные статистически взаимно независимые винеровские процессы с нулевыми математическими ожиданиями (м. о.) и корреляционными матрицами (к. м.)

$$M\{\partial\xi(t, \omega)\partial\xi'(\tau, \omega)\} = S_{\xi\xi}(t)|t-\tau|, \quad M\{\partial\eta(t, \omega)\partial\eta'(\tau, \omega)\} = S_{\eta\eta}(t)|t-\tau|,$$

соответственно, $H(t)$, $A(t)$ и $G(t)$ матрицы наблюдения, состояния и возмущения соответствующих размерностей. Начальные значения $x_0(\omega)$ и $y_0(\omega)$ не зависят от процессов $\xi(t, \omega)$ и $\eta(t, \omega)$ при $t \in I_t$ и являются гауссовыми стохастическими векторами, причем значение $x_0(\omega)$ имеет произвольную плотность распределения (п. р.) вероятностей $p(x_0(\omega))$ с конечными числовыми характеристиками. В дальнейшем для краткости символ ω опускается.

В МС описание процесса $x(t)$ в виде (1), в большинстве случаев, справедливо с точностью до множества неопределенных параметров, которые обозначаются через вектор $v = (v_1, \ldots, v_r)$, причем в приложениях обычно неясна сущность этого вектора, т. е. неясно, является он детерминированным или стохастическим, и тем более неизвестны его характеристики. В таких ситуациях единственное разумное решение связано с адаптивной фильтрацией в. с. $x(t)$. Разумеется, что под термином вектор «неопределенных параметров» скрывается огромное число возможностей, которые охватывают и детерминированные процессы с неопределенными параметрами, и стохастические процессы с неизвестными либо частично известными числовыми характеристиками ([3, 4]). В последнем случае может быть задана п. р., часть параметров которой неизвестна ([5]).

Постановка задачи. Пусть вышеописанная *МС* и соответствующий процесс наблюдения характеризуются следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dx(t) = A(t, v)\,x(t)\,dt + G(t, v)\,d\xi(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

$$dy(t) = H(t, v)\,x(t)\,dt + d\eta(t), \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (3)$$

и пусть требуется получить с минимальной дисперсией оценку $\hat{x}(t, v) = \hat{M}\{x(t)/Y_t, v\}$, которая минимизирует функционал $M\{\|x(t) - \hat{x}(t, v)\|^2/Y_t\}$, где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Здесь $A(t, v)$, $G(t, v)$ и $H(t, v)$ — матрицы состояния, возмущения и наблюдения, вычисляемые при фиксированных значениях вектора параметров v.

Предполагается, что стационарный параметр v полностью определяет МС и процесс наблюдения является случайным постоянным вектором в фиксированном непрерывном пространстве V и характеризуется априорной п. р. $p(v)$. Таким образом, при известных динамических и статистических описаниях процессов $x(t)$, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ и при неполных $(m < n)$ и искаженных шумом наблюдениях (3) задача фильтрации в. с. МС (2) заключается в определении оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценки $\hat{x}(t, v)$, если в. с. МС полностью определяется с помощью предполагаемой начальной п. р. $p(v)$.

В этой задаче определение оптимальных оценок сводится к синтезу алгоритма адаптивного фильтра (АФ) с присущими ему трудностями ([3, 6]). Для того, чтобы обойти существующие трудности реализации, связанные с неопределенностями вектора v, в настоящей работе разрабатывается алгоритм АФ, который способен изменять как свои параметры, так и свою структуру, где под структурой понимается размерность в. с. $x(t)$. Разработанный алгоритм АФ позволяет построить оптимальную (с точки зрения минимума среднеквадратичной ошибки) текущую оценку в. с. МС (2) при неполных и искаженных шумом наблюдениях (3) и векторе неопределенных параметров.

Алгоритм синтеза адаптивного фильтра. Поставленную задачу синтеза можно рассматривать как совместную фильтрацию в. с. МС (2) и ее идентификацию. Для решения этой задачи и для восполнения недостаточной информации относительно вектора неопределенных параметров следует активно использовать «изученную текущую информацию». В связи с этим в основу алгоритма синтеза АФ положена идея бейесовского подхода, которая состоит в использовании результатов неполных текущих наблюдений (3) для уточнения оценки в. с. МС (2), т. е. состоит в переходе от априорных оценок к апостериорным оценкам при реализации процесса Y_t.

Алгоритм синтеза АФ определяется по следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть МС описывается уравнением* (2). *Тогда, в соответствии с уравнением* (3) *при заданной реализации процесса* Y_t,

а) *оптимальная оценка* $\hat{x}(t) = M\{x(t)/Y_t\}$ *дается соотношением*

$$\hat{x}(t) = \int_V \hat{x}(t, v)\, p(v/Y_t)\, dv, \tag{4}$$

б) *апостериорная п. р. вектора неопределенных параметров* v *определяется выражениями*

$$p(v/Y_t) = p(v)\hat{L}(t, v)/\hat{L}(t) = p(v)\hat{L}(t, v)/\int_V p(v)\hat{L}(t, v)\, dv, \tag{5}$$

где $\hat{L}(t)$ — *безусловный критерий правдоподобия*, $\hat{L}(t, v)$ — *оценка априорной п. р. и определяется выражением*

$$\hat{L}(t, v) = M\{L(t, v)/Y_t\}, \tag{6}$$

где $L(t, v)$ *задается равенством* ([7])

$$L(t, v) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} x'(\tau) H'(\tau, v) S_{\eta\eta}^{-1}(\tau)\, dy(\tau) - \right.$$

$$\left. -(1/2)\int_{t_0}^{t} x'(\tau) H'(\tau, v) S_{\eta\eta}^{-1}(\tau) H(\tau, v) x(\tau)\, d\tau\right\}, \tag{7}$$

в) *условная к. м. ошибки фильтрации в. с.*

$$R(t) = M\{\Delta x(t)\Delta x(t)/Y_t\}, \quad \Delta x(t) \stackrel{\Delta}{=} x(t) - \hat{x}(t),$$

определяется соотношением

$$R(t) = \int_V [R(t, v) + \Delta R(t, v)]\, p(v/Y_t)\, dv. \tag{8}$$

где $R(t, v) = M\{[\Delta x(t, v)\Delta x'(t, v)] / Y_t, v\}$, $\Delta x(t, v) \stackrel{\Delta}{=} x(t) - \hat{x}(t, v)$,

$$\Delta R(t, v) = \Delta\hat{x}(t, v)\Delta\hat{x}'(t, v), \quad \Delta\hat{x}(t, v) \stackrel{\Delta}{=} \hat{x}(t, v) - \hat{x}(t).$$

Доказательство теоремы 1 приведено ниже.

Из теоремы 1 следует, что реализация оптимальной нелинейной оценки определяется в терминах АФ и основывается на оценке $\hat{x}(t, v)$ и апостериорной п. р. $p(v/Y_t)$. $\hat{x}(t, v)$ при каждом фиксированном значении вектора v получается из линейного фильтра Калмана—Бьюси

$$d\hat{x}(t, v) = A(t, v)\hat{x}(t, v)dt + R(t, v)H'(t, v)S_{\eta\eta}^{-1}(t)[dy(t) - H(t, v)\hat{x}(t, v)dt], \quad \hat{x}(t_0, v) = \hat{x}_v^0, \tag{9}$$

$$\dot{R}(t, v) = A(t, v)R(t, v) + R(t, v)A'(t, v) + G(t, v)S_{\xi\xi}(t)G'(t, v) - R(t, v)H'(t, v)S_{\eta\eta}^{-1}(t)H(t, v)R(t, v), \quad R(t_0, v) = R_v^0. \tag{10}$$

Апостериорная п. р. $p(v/Y_t)$ определяется критерием $\max\limits_{v} \hat{L}(t, v)$ максимального правдоподобия (МП), где $\hat{L}(t, v)$ дается соотношением (7). Итак, алгоритм синтеза АФ заключается в получении оптимальной оценки $\hat{x}(t, v)$ (при определенном значении вектора v) с ее последующим нелинейным преобразованием, связанным с неопределенностями вектора v. При этих преобразованиях с целью улучшения фильтрации п. с. ниже применяется критерий апостериорного МП $\max\limits_{v} p(v/Y_t)$.

Таким образом, АФ разбивается на две части: первая часть состоит из линейных фильтров (уравнения (9), (10)), соответствующих каждому определенному значению вектора v, а вторая часть включает вычисление критерия МП и характеризует адаптивную природу фильтра при векторе неопределенных параметров v с априорной п. р. $p(v)$. Следует отметить, что условная к. м. $R(t)$ в (8) состоит из слагаемых, которые легко вычислить. Последняя полезна при определении качества АФ и для сравнения адаптивных и неадаптивных фильтров. Следует отметить также, что приращение $\Delta R(t, v)$ представляет собой меру ухудшения качества, если вместо АФ применить линейный фильтр (9), (10) при фиксированном значении вектора v.

О реализации алгоритма синтеза адаптивного фильтра. Конкретное применение алгоритма непосредственно связано с характером пространства значений вектора неопределенных параметров. Для облегчения вычислительной процедуры непрерывное пространство параметров следует аппроксимировать конечным множеством точек. Априорную п. р. вероятностей можно представить в виде

$$p(v) = \sum_{i=1}^{\nu} p(v^i)\delta(v - v^i),$$

где ν — число точек выборки, а $p(v^i)$ обозначает априорную вероятность для v^i. При этом соотношения (4), (5) и (8) даются формулами:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{s} \hat{x}(t, v^i) p(v^i / Y_t), \tag{4'}$$

$$p(v^i / Y_t) = p(v^i) \hat{L}(t, v^i) / \sum_{i=1}^{s} p(v^i) \hat{L}(t, v^i), \tag{5'}$$

$$R(t) = \sum_{i=1}^{s} [R(t, v^i) + \Delta R(t, v^i)] p(v^i / Y_t), \tag{8'}$$

где для приемлемой аппроксимации необходимое число точек выборки может быть изменено ([8]).

Применение алгоритма синтеза адаптивного фильтра. В качестве приложения полученных результатов рассматривается АФ при наличии неопределенностей в процессах наблюдения. В классической теории фильтрации ([1, 2, 6]) часто предполагается, что процесс наблюдения всегда содержит подлежащий оценке в. с. и этот процесс содержит шум с ненулевой вероятностью. Такая ситуация возникает при слежении за целью в пространстве, когда точно неизвестно, присутствует ли там цель ([9]). Для таких ситуаций, в частности, неопределенность параметров состоит в том, что наблюдение (3) задается уравнением ([1, 5])

$$dy(t) = \alpha H(t) x(t) dt + d\eta(t), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{11}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если в. с. (цель) присутствует,} \\ 0, & \text{если в. с (цель) отсутствует.} \end{cases}$$

Для таких ситуаций и для полноты соответствующих результатов формулируется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вектор неопределенных параметров в пространстве V принимает дискретные значения v^i с априорной п. р. $p(v^i) = p_i$, где $i = 0, 1$, и пусть переменные*

$$\bar{x}(t) = x(t) - \Phi(t, t_0) \hat{x}(t_0), \tag{12}$$

$$\bar{y}(t) = y(t) - H(t) \Phi(t, t_0) \hat{x}(t_0) \tag{13}$$

удовлетворяют уравнениям

$$d\bar{x}(t) = A(t) \bar{x}(t) dt + G(t) d\xi(t), \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

$$d\bar{y}(t) = \alpha H(t) \bar{x}(t) dt + d\eta(t), \qquad \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0,$$

где $\bar{x}_0$ — гауссовский случайный вектор с нулевым м. о. и к. м. $\bar{R}(t_0) = R(t_0)$.

Тогда при заданной реализации процесса наблюдения Y_t:

а) *числовые характеристики АФ определяются соотношениями:*

$$\hat{x}(t) = p(v^1 / Y_t) \hat{\bar{x}}(t, v^1) + \Phi(t, t_0) \hat{x}(t_0), \tag{14}$$

$$R(t)=\sum_{i=0}^{1} p(v^i/Y_t)\overline{R}(t, v^i)+\left(\prod_{i=0}^{1} p(v^i/Y_t)\right)\hat{\bar{x}}(t, v^1)\hat{\bar{x}}'(t, v^1), \quad (15)$$

где $\hat{x}(t, v^1)=\hat{\bar{x}}(t, v^1)+\Phi(t, t_0)\hat{x}(t_0),$

$$p(v^1/Y_t)=1-p(v^0/Y_t)=\lambda\hat{L}(t, v^1)/[1+\lambda\hat{L}(t, v^1)], \quad \lambda \overset{\Delta}{=} p_1/p_0, \quad (16)$$

б) оценка $\hat{\bar{x}}(t, v^0)$ *и соответствующая к. м. ошибок фильтрации* $\overline{R}(t, v^0)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\hat{\bar{x}}(t, v^0)=M\{\bar{x}(t)/Y_t, v^0\}=0,$$

$$\dot{\overline{R}}(t, v^0)=A(t, v^0)\overline{R}(t, v^0)+\overline{R}(t, v^0)A'(t, v^0)+G(t, v^0)S_{\xi\xi}(t)G'(t, v^0), \quad (17)$$

$$\overline{R}(t_0, v^0)=R^0_{v^0},$$

а оценка $\hat{\bar{x}}(t, v^1)=M\{\bar{x}(t)/Y_t, v^1\}$ *и к. м. ошибок* $\overline{R}(t, v^1)$ *даются аналогичными* (9), (10) *уравнениями.*

Доказательство этой теоремы также приводится ниже.

В этом случае также бейесовский оптимальный алгоритм синтеза выбирает то или иное решение в зависимости от неравенства $p(v^1/Y_t)\gtrless C$, где C — некоторая величина, характеризующая скорость адаптации, а оценка вектора параметров определяется соотношением

$$\hat{v}(t)=M\{v/Y_t\}=p(v^1/Y_t). \quad (18)$$

Таким образом, бейесовский оптимальный алгоритм синтеза заключается в получении оптимальной оценки параметра α с ее последующим нелинейным преобразованием. Кроме того, из соотношения (18) можно заключить, что алгоритм синтеза АФ может рассматриваться как совместная фильтрация в. с. МС и ее идентификация. Как уже упоминалось, идентификация, основанная на критериях МП, сводится к выбору значения v^*, при котором

$$p(v^*/Y_t)=\max_{v}\{p(v^j/Y_t); \quad j=1, 2, \ldots, \nu\}$$

и в качестве оценки $\hat{v}$ принимается значение v^*. Следует заметить, что в этом случае задача идентификации МС соответствует задаче выбора определенного значения вектора параметров v^* или определенного фильтра.

Доказательство теоремы 1. В задаче синтеза АФ, используя сглаживающее свойство м. о., можно записать

$$\hat{x}(t)=M\{M\{x(t)/Y_t, v\}/Y_t\}=\int_V \hat{x}(t, v)p(v/Y_t)dv,$$

$$\hat{x}(t, v)\overset{\Delta}{=}M\{x(t)/Y_t, v\},$$

где из формулы Бейеса апостериорная п. р. $p(v/Y_t)$ имеет вид

$$p(v/Y_t) = p[x(t),\ v/Y_t]/p[x(t)/Y_t,\ v], \tag{19}$$

Совместная п. р. $p[x(t),\ v/Y_t]$ может быть получена из уравнения МС (2)

$$p[x(t),\ v/Y_t] = M_{Y_t}\{L(t,\ v)/x(t),\ v\}\, p[x(t),\ v]/M_{Y_t}\{L(t,\ v)\}. \tag{20}$$

Апостериорная условная п. р. может быть получена из уравнений (2), (3)

$$p[x(t)/Y_t,\ v] = M_{Y_t}\{L(t,\ v)/x(t),\ v\}\, p[x(t)/M_{Y_t}\{L(t,\ v)/v\}. \tag{21}$$

Подставляя это соотношение в равенство (19), можно получить

$$p(v/Y_t) = M_{Y_t}\{L(t,\ v)/v\}/M_{Y_t}\{L(t,\ v)\} =$$

$$= M_{Y_t}\{L(t,\ v)/v\}/\int\limits_V \{L(t,\ v)/v\}\, p(v)\, dv. \tag{22}$$

Далее, используя равенство (6) в соотношении (22), можно получить доказываемое представление (5).

Условная к. м. ошибки $R(t)$ получается следующим образом:

$$R(t) = \int\limits_V \bar{R}(t,\ v)\, p(v/Y_t)\, dv,$$

где

$$\bar{R}(t,\ v) = M\{\Delta x(t)\, \Delta x'(t)/Y_t,\ v\} = M\{x(t)\, x'(t)/Y_t,\ v\} +$$

$$+ \bar{x}(t)\, \hat{x}'(t) - \bar{x}(t)\, \bar{x}'(t,\ v) - \bar{x}(t,\ v)\, \hat{x}'(t) = M\{\Delta\bar{x}(t,\ v)\, \Delta\bar{x}'(t,\ v)/Y_t,\ v\} +$$

$$+ \Delta\hat{x}'(t,\ v)\, \Delta\hat{x}'(t,\ v) = R(t,\ v) + \Delta R(t,\ v).$$

Используя выражения (19) и (20), получаем требуемое равенство (8).

Доказательство теоремы 2. Из выражений (12) и (13) следует

$$\bar{x}(t) = \bar{\bar{x}}(t) + \Phi(t,\ t_0)\, x(t_0). \tag{23}$$

Кроме того, так как априорную п. р. вероятностей можно представить в виде $p(v) = \sum\limits_{l=0}^{1} p(v^l)\, \delta(v - v^l)$, из выражения (4′) можно получить

$$\hat{\bar{x}}(t) = \sum_{l=0}^{1} p(v^l/Y_t)\, \hat{\bar{x}}(t,\ v^l) = p(v^1/Y_t)\, \bar{\bar{x}}(t,\ v^1), \tag{24}$$

где учитывалось, что $\hat{\bar{x}}(t,\ v^0) = 0$.

Таким образом, оценка (14) получается из выражений (13) и (24). К. м. $R(t) = R(t)$, определяемую выражением (8), можно представить в виде

$$R(t) = \sum_{i=0}^{1} [p(v^i / Y_t)\bar{R}(t, v^i) + \Delta\bar{R}(t, v^i)].$$

Откуда, с учётом равенства (23) и (24) и $\sum_{i=0}^{1} p(v^i / Y_t) = 1$, получается требуемое выражение (15). Уравнение (16) получается непосредственно из выражения (5), если учесть, что знаменатель правой части этого выражения в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sum_{i=0}^{1} p_i L(t, v^i) = p_0 [1 + rL(t, v^1)]$$

Оценка $\hat{x}(t, v^1)$ относится к случаю, когда имеет место $dy(t) = H(t)x(t)dt + d\eta(t)$ и поэтому удовлетворяет уравнениям линейного фильтра (9), (10). Кроме того, следует заметить, что при $x(t)=0$ реализация Y_t состоит только из шума $\eta(t)$ и поэтому $\bar{x}(t, v^0) = \Phi(t, t_0)x(t_0) = 0$. Поскольку $\bar{x}(t, v^0)$ является экстраполированной оценкой, соответствующая к. м. имеет вид (17).

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

Անընդհատ Մարկովյան համակարգերի դրության ադապտիվ ֆիլտրի սինթեզը անորոշության պայմաններում

Աշխատանքում դիտարկվում է անորոշության պայմաններում անընդհատ Մարկովյան համակարգերի դրության վեկտորի ադապտիվ ֆիլտրի սինթեզի խնդիրը։ Սինթեզի ալգորիթմը կազմված է սովորական (ոչ ուսանող) մասից, որը իրենից ներկայացնում է Կալման-Բյուսիի գծային ֆիլտր, և ոչ գծային մասից, որը բնութագրում է անորոշության պայմաններում ադապտիվ (ուսանող) ֆիլտրի հնարավորությունը։ Քննարկվում են ադապտիվ ֆիլտրի ստեղծման ալգորիթմի իրականացման և կիրառման հարցերը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Брутян*, Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение, Анастан, Ереван, 1984. [2] *В. Г. Флеминг, Р. В. Ришел*, Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, Мир, М., 1978. [3] *В. К. Брутян*, ДАН АрмССР, т. 77, № 3, с 108—113 (1983). [4] *В. К Брутян*, ДАН АрмССР, т. 90, № 2, с. 65—70 (1990). [5] *В. К. Брутян*, Некоторые вопросы применения марковских процессов к исследованию нелинейных автоматических систем, Изд. ЕГУ, 1974. [6] *Я. Н. Ройтенберг*, Автоматическое управление, Наука, М., 1978. [7] *K. Watanabe, T. Yoshimura, T. Soeda*, IEEE Trans. Automat. Contr., v. 27, № 1, 216—219 (1982). [8] *В. К. Брутян*, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 6, 27—35, 1980. [9] *В. К. Брутян*, ДАН АрмССР, т. 77, № 5, 205—208 (1983).