ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 518.9

В. С. Амбарян

Определение множества точек встречи, когда P начинает преследование с задержкой

(Представлено академиком АН Армении Н. У. Аракеляном 19/III 1991)

Рассматривается антагонистическая игра преследования в случае, когда P начинает преследование с задержкой и поимка точечная.

Пусть преследователь P и преследуемый E перемещаются в плоскости с постоянными по модулю скоростями α и β соответственно ($\alpha > \beta$). Местоположение преследователя в момент времени t обозначим через $P(t)$, а местоположение преследуемого через $E(t)$. Игрок P в течение времени T ($T > 0$) не получает никакой информации об игроке E и покоится в точке $P(0)$. В момент времени τ ($\tau \geqslant T$) игроку P становится известным местоположение $E(\tau)$, направление скорости игрока E в момент времени τ, и он начинает преследование. Игрок E знает свое местоположение и местоположение противника в каждый момент времени.

Предполагается, что задано некоторое множество S на плоскости. В начальный момент времени ($t=0$) игроки находятся в множестве S ($P(0), E(0) \in S$). Преследуемый E считается пойманным, если местоположения игроков P и E в некоторый момент времени совпадают. Целью игрока P является поимка игрока E до достижения последним «линии жизни» — границы множества S. Игрок E стремится достичь «линии жизни» до поимки.

Пусть $p(t)\,(l(t))$ — траектория игрока $P\,(E)$, когда он использует синтезирующую стратегию $u\ (v)$, где $u\ (v)$ вектор-функция $u=(u_1, u_2)$ ($v = v_1, v_2$)) и u_1, u_2 (v_1, v_2), удовлетворяющие условию

$$u_1^2 + u_2^2 = \alpha^2 \quad (v_1^2 + v_2^2 = \beta^2).$$

Здесь стратегии определены как в ([1]), т. е. стратегия $u = u(x, y, t, v)$ зависит от фазовых состояний игроков, времени и управления игрока E, стратегия $v = v(x, y, t)$ зависит лишь от фазовых состояний игроков и времени.

Обозначим через

$$t_E = \min\{t : l(t) \overline{\in} S\};$$

$$t_P = \min\{t : p(t) = l(t)\}.$$

Тогда функция выигрыша в ситуации (u, v) определяется следующим образом:

$$K(P(0), E(0), u, v) = \begin{cases} +1, & \text{если } t_E > t_P, \\ -1, & \text{если } t_E \leqslant t_P. \end{cases}$$

Описанную игру обозначим через $\Gamma(P(0), E(0), S, T)$.

Определение. Параллельным сближением (сокращенно П-стратегией) называется способ преследования игроком P игрока E, при котором отрезок $|P(t)\,E(t)|$ в каждый момент времени t до момента встречи параллелен отрезку $|P(0)\,E(0)|$ и длина отрезка $|P(t)\,E(t)|$ убывает со временем (см. [1]).

Отметим, что П-стратегия—способ преследования, который гарантирует преследователю встречу с игроком E за минимальное время при прямолинейном движении игрока E. П—стратегию обозначим через u^n.

Допустим, что игрок E движется прямолинейно начиная с момента $t=0$, а игрок P начинает преследование с момента времени T и применяет П-стратегию. Тогда геометрическое место точек встречи состоит из всех точек B, удовлетворяющих условию

$$\frac{|P(0)\,B|}{\alpha} + T = \frac{|E(0)\,B|}{\beta},$$

т. е.

$$\alpha\,|E(0)\,B| - \beta\,|P(0)\,B| = \alpha\beta T, \tag{1}$$

которое является уравнением кривой, называемой овалом Декарта [2]. Обозначим его через $D_T(P(0), E(0))$. Отметим, что овал Декарта состоит из двух замкнутых линий, одна из которых объемлет другую. Так как мы рассмотрим только прямолинейные движения игрока E от точки $E(0)$, то получаем часть овала Декарта, а именно, внешнюю замкнутую линию.

Введем декартову систему координат таким образом, чтобы в начальный момент времени преследователь P находился в начале координат $P(0) = \{0, 0\}$, а преследуемый E в точке с координатами $E(0) = \{a, 0\}$.

Тогда уравнение овала Декарта (1) в прямоугольной системе запишем в виде

$$\alpha\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \beta\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha\beta T, \tag{2}$$

$$\alpha^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2) = \beta^2(x^2 + y^2) + 2\alpha\beta^2 T\sqrt{x^2 + y^2} + (\alpha\beta T)^2,$$

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2\alpha^2 a}{\alpha^2 - \beta^2}\,x + \frac{(\alpha a)^2 - (\alpha\beta T)^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 - \left(\frac{2\alpha\beta^2 T}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 (x^2 + y^2) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что если $a = \beta T$, то уравнение (3) принимает вид

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2\alpha^2 a}{\alpha^2 - \beta^2} x\right)^2 - \left(\frac{2\alpha\beta^2 a}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 (x^2 + y^2) = 0,$$

что представляет собой улитку Паскаля ([2]).

Замечание. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2\alpha^2 a}{\alpha^2 - \beta^2} x + \frac{(\alpha a)^2 + (\alpha\beta T)^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{2\alpha^2\beta T}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 ((x - a)^2 + y^2) = 0. \qquad (4)$$

Из (2) имеем

$$\alpha \sqrt{(x - a)^2 + y^2} - \alpha\beta T = \beta \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2\alpha^2 a}{\alpha^2 - \beta^2} x + \frac{(\alpha a)^2 + (\alpha\beta T)^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{2\alpha^2\beta T}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 ((x - a)^2 + y^2) = 0.$$

Известно, что при параллельном сближении (в случае, когда движение P происходит без задержки) и при прямолинейном движении игрока E множество точек встречи является окружностью Аполлония, центр которой лежит на луче $P(0)\,E(0)$ и радиус равен

$$R = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \,|P(0)\,E(0)|\,.$$

Нетрудно показать, что координаты центра окружности Аполлония $O(x_0, y_0)$ определяются по формуле

$$x_0 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} x_E - \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} x_P, \qquad (5)$$

$$y_0 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} y_E - \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} y_P, \qquad (6)$$

где (x_E, y_E) координаты игрока E, а (x_P, y_P) координаты игрока P.

Обозначим через $G_T(P(0), E(0))$ множество всевозможных точек встречи в игре $\Gamma(P(0), E(0), S, T)$, в ситуации (u^*, v) для различных v.

Если множество $G_T(P(0), E(0))$ содержится целиком в множестве S, то встреча с игроком E всегда возможна при использовании игроком P стратегии u^*.

Теорема 1. *Пусть игрок P принимает П-стратегию, тогда овал Декарта $D_T(P(0), E(0))$, представляющий собой множество точек встречи при прямолинейном движении E, совпадает с границей множества $G_T(E(0), P(0))$ (множество точек встречи).*

Доказательство. Определим структуру множества $G_\tau(P(0), E(0))$. Так как P в течение времени T стоит на месте, то за это время E может оказаться в любой точке круга $A_R(E(0))$ с радиусом $R = \beta T$ и центром $E(0)$. Для каждой точки E_φ окружности $\overline{A_R(E(0))}$ с радиусом $R = \beta T$ и центром $E(0)$ существует окружность Аполлония, построенная для точек $P(0)$ и E_φ, где φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ угол между отрезком $|E_\varphi E(0)|$ и осью OX. Обозначим эту окружность Аполлония через $\overline{A(P(0), E_\varphi)}$, а центр — через O_φ. Получим семейство окружностей с параметром φ. Обозначим через $A(P(0), E_\varphi)$ круг, соответствующий окружности $\overline{A(P(0), E_\varphi)}$.

Как известно при параллельном сближении и при всевозможных движениях E множество точек встречи содержится в круге Аполлония (см. ([1])); тогда можно показать, что $G_\tau(P(0), E(0))$ имеет вид

$$G_\tau(P(0), E(0)) = \left(\bigcup_{0 \leqslant \varphi < 2\pi} A(P(0), E_\varphi)\right) \cup A_R(E(0)),$$

а граница $G_\tau(P(0), E(0))$ представляет собой огибающую семейства окружностей $\overline{A(P(0), E_\varphi)}$. Покажем, что эта огибающая и овал $D_\tau(P(0), E(0))$ совпадают.

Точка E_φ имеет координаты

$$x_{E_\varphi} = a + R\cos\varphi,$$

$$y_{E_\varphi} = R\sin\varphi, \quad \text{где} \quad R = \beta T.$$

Используя (5), (6), имеем

$$x_{O_\varphi} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}(a + R\cos\varphi)$$

$$y_{O_\varphi} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} R\sin\varphi, \quad \text{так как } x_P = y_P = 0.$$

Радиус окружности $\overline{A(P(0), E_\varphi)}$ равен

$$R_\varphi = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} |P(0) E_\varphi|;$$

$$|P(0) E_\varphi|^2 = (x_{E_\varphi} - x_{P(0)})^2 + (y_{E_\varphi} - y_{P(0)})^2 = (a + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi;$$

$$F(x, y, \varphi) = \left(x - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}(a + R\cos\varphi)\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} R\sin\varphi\right)^2 -$$

$$- \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 ((a + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет семейство окружностей с радиусом R_φ и центром, находящимся на окружности $\overline{A_R(E(0))}$.

$$F(x, y, \varphi) = x^2 - 2k(a + R\cos\varphi)x + k^2(a + R\cos\varphi)^2 +$$

$$+ y^2 - 2kRy\sin\varphi + k^2R^2\sin^2\varphi - \frac{k\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}((a + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi) = 0,$$

где $k = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$.

Отсюда следует

$$x^2 - 2kax - 2kRx\cos\varphi + y^2 - 2kRy\sin\varphi +$$

$$+ \left(k^2 - \frac{k\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)((a + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi) = 0.$$

После соответствующих преобразований получаем

$$x^2 + y^2 - 2kax + k(a^2 + R^2) - 2kR((x - a)\cos\varphi + y\sin\varphi) = 0. \quad (8)$$

Огибающая должна удовлетворять уравнениям

$$F(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad F'_\varphi(x, y, \varphi) = 0$$

при всевозможных значениях φ ([3])

$$F'_\varphi(x, y, \varphi) = 2kR((x - a)\sin\varphi - y\cos\varphi) = 0.$$

Далее имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x - a};$$

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{y}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}.$$

Исключив φ из (8), получим уравнение огибающей линии семейства окружностей $\overline{A(P(0), E_\varphi)}$

$$x^2 + y^2 - 2kax + k(a^2 + R^2) = 2kR\left(\frac{(x - a)^2}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}}\right);$$

(9)

$$x^2 + y^2 - 2kax + k(a^2 + R^2) = 2kR\sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Подставляя значение k, получаем

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2 a}{\alpha^2 - \beta^2}x + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}(a^2 + R^2)\right)^2 -$$

$$-\left(2\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}R\right)^2((x - a)^2 + y^2) = 0.$$

Из (4) следует, что огибающая линия есть овал Декарта $D_\tau(P(0), E(0))$. Таким образом, овал $D_\tau(P(0), E(0))$ оказался границей множества $G_\tau(P(0), E(0))$.

Теорема доказана.

Теперь можно решить игру с „линией жизни" $\Gamma(P(0), E(0), S, T)$.

Теорема 2. *В игре* $\Gamma(P(0), E(0), S, T)$ *существует ситуация равновесия для всех начальных позиций* $P(0)$, $E(0)$. *Оптимальной стратегией игрока* P *является* П-*стратегия. Если*

1) *овал Декарта* $D_\tau(P(0), E(0))$ *целиком содержится в множестве* S, *тогда* $\mathrm{val}\,\Gamma(P(0), E(0), S, T) = +1$ (val *означает значение игры* Γ). *Игрок* E *ловится в множестве* S, *при любой стратегии* v $(v=(v_1, v_2);\ v_1^2+v_2^2=\beta^2)$, *поэтому его оптимальной стратегией игрока является любая стратегия* v $(v=(v_1, v_2);\ v_1^2+v_2^2=\beta^2)$;

2) *овал Декарта* $D_\tau(P(0), E(0))$ *имеет непустое пересечение с дополнением множества* S, *тогда* $\mathrm{val}\,\Gamma(P(0), E(0), S, T) = -1$. *Оптимальная стратегия игрока* E *совпадает с постоянным управлением, переводящим игрока* E *в точку* M *(где* M — *любая точка пересечения множеств* $D_\tau(P(0), E(0))$ *с дополнением множества* S) *по прямой.* P *не может осуществить встречу с* E *в множестве* S.

Доказательство 1. Допустим, что овал $D_\tau(P(0), E(0))$ содержится целиком в множестве S. Тогда из теоремы 1 следует, что при использовании игроком П-стратегии встреча с игроком E всегда происходит в множестве $G_\tau(P(0), E(0))$, ограниченном овалом $D_\tau(P(0), E(0))$. Однако поскольку $D_\tau(P(0), E(0)) \subset S$, то и $G_\tau(P(0), E(0)) \subset S$, т. е. в этом случае встреча при любых стратегиях игрока E происходит в S.

2. Допустим, $D_\tau(P(0), E(0))$ имеет непустое пересечение с дополнением множества S.

Пусть игрок E выбирает любую точку M, принадлежащую пересечению множеств $D_\tau(P(0), E(0))$ с дополнением множества S, и двигается к ней по прямой. Тогда начиная с момента времени T (по определению П-стратегии) игрок P будет перемещаться по единственной полупрямой, исходящей из $P(0)$ и проходящей через точку встречи M. При этом переход в M осуществляется за минимальное время. Поэтому не может существовать другой стратегии игрока P, при которой точка встречи оказалась бы ближе $E(O)$, чем точка M. Поэтому игрок E достигает дополнения множества S до встречи с P, независимо от действий последнего. Теорема доказана.

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении

Վ. Ս. ՀԱՄԲԱՐՅԱՆ

Հանդիպման կետերի բազմության որոշումը, երբ P-ն սկսում է հետապնդումը հապաղումով

Աշխատանքում դիտարկվում է S կիսահարթությունում «կյանքի գծի» խաղ, որում P հետապնդողը $T>0$ ժամանակամիջոցում մնում է անշարժ $P(0)$ սկզբնական դիրքում։ Ցույց է տրված, որ հանդիպման կետերի բազմությունը, երբ հետապնդողը կիրառում է Π-ստրատեգիա, հանդիսանում է Դեկարտյան օվալի ներքին տիրույթը։ Ապացուցված է նաև վերը նշված խաղի համար հիմնական թեորեմը։ P խաղացողի համար օպտիմալ ստրատեգիա է հանդիսանում Π-ստրատեգիան։ Եթե վերոհիշյալ Դեկարտյան օվալը ամբողջությամբ ընկած է S կիսահարթությունում, ապա P-ն երաշխավորում է հանդիպումը E հետապնդվողի հետ S-ում, հակառակ դեպքում E-ն կարող է խուսափել P-ի հետ հանդիպումից S-ում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Петросян*, ДАН СССР, т. 161, № 1, с. 52—54 (1965). [2] *А. А. Савелов*, Плоские кривые, Физматгиз, М., 1960. [3] *П. К. Рашевский*, Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М., 1956.