ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 17/XII 1990)

В работе рассматривается плоская контактная задача для упругой, ортотропной полуплоскости ($x \geq 0$) с вертикальным конечным разрезом ($0<x<b$), начиная с горизонтальной границы ($x=0$). На конечном участке границы ($-a<z<a$) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза ($z=0$). Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних напряжений, а в разрезе действует только нормальное давление.

Рассматривается плоское деформированное состояние ($-\infty<y<\infty$), и задача решается в перемещениях методом Фурье. Решение представлено в виде суммы интегралов Фурье. Отыскание произвольных функций интегрирования в конечном счете сводится к решению системы из двух «парных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

В частных случаях, когда длина разреза стремится к нулю или к бесконечности, показано, что соответственно получается контактная задача плоской теории упругости для полуплоскости без разреза и для четвертьплоскости (квадранта).

Другой частный случай, когда полуплоскость изотропная, рассматривался в ранних работах авторов.

Так как задача симметрична относительно оси $z=0$, то можно ограничиться рассмотрением только четверти плоскости ($0<x<\infty$, $0<z<\infty$).

Граничные условия для четверти плоскости имеют вид:

$$\tau_{zx}(0, z)=0; \quad 0<z<\infty; \quad \tau_{xz}(x, 0)=0 \quad 0<x<\infty;$$

$$U_x(0, z)=f_1(z) \quad 0<z\leqslant a; \quad \sigma_x(0, z)=0 \quad a<z<\infty; \tag{1}$$

$$\sigma_z(x, 0)=f_2(x) \quad 0<x<b; \quad U_z(x, 0)=0 \quad b\leqslant x<\infty;$$

Решение задачи ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$U_x(x, z)=\frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha, z)\sin\alpha x\,d\alpha+\frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta, x)\sin\beta z\,d\beta;$$

$$U_z(x, z)=\frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha, z)\cos\alpha x\,d\alpha+\frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta, x)\cos\beta z\,d\beta; \tag{2}$$

$$\overline{U}(\alpha, z)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_1(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}, \quad \overline{U}(\beta, x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_1(t_k)/t_k B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x},$$

$$\overline{W}(\alpha, z)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}, \quad \overline{W}(\beta, x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x} \tag{3}$$

Здесь $A_k(\alpha)$ и $B_k(\alpha)$ — неизвестные функции интегрирования, которые нужно определить из условий (1), а плотности, входящие в (3), определяются по формулам:

$$\Delta_1(t_k)=\left(\frac{c_{13}}{c_{44}}+1\right)\cdot t_k; \quad \Delta_2(t_k)=1-\frac{c_{44}}{c_{11}}t_k^2. \tag{4}$$

Из решения биквадратного уравнения

$$\frac{c_{33}}{c_{11}}t^4+\left(\frac{c_{13}^2}{c_{44}c_{11}}+2\frac{c_{13}}{c_{11}}-\frac{c_{13}}{c_{44}}\right)t^2+1=0 \tag{5}$$

определяется t_k.

Здесь c_{11}, c_{13}, c_{33} и c_{44} — модули упругости материала.

Используя основные соотношения теории упругости ([1]) для исследуемой среды и (2), (3), можно все компоненты тензора напряжений выразить через $A_k(\alpha)$ и $B_k(\alpha)$:

$$\sigma_x(x, z)=\int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_x(\alpha, z)\cos\alpha x\,d\alpha-\int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_x(\beta, z)\sin\beta z\,d\beta;$$

$$\sigma_z(x, z)=\int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_z(\alpha, z)\cos\alpha x\,d\alpha-\int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_z(\beta, x)\sin\beta z\,d\beta; \tag{6}$$

$$\tau_{zx}(x, z)=-\int_0^\infty \alpha^2\overline{\tau}_{zx}(\alpha, z)\sin\alpha x\,d\alpha+\int_0^\infty \beta^2\overline{\tau}_{zx}(\beta, x)\cos\beta z\,d\beta,$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_x(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2}\left[\Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}}{c_{44}}\Delta_2(t_k)\cdot t_k\right]A_k(\alpha)\,e^{-\alpha t_k z};\\
&\bar{\sigma}_x(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3} + \frac{c_{13}}{c_{44}}\Delta_2(t_k)\right]B_k(\beta)\,e^{-\frac{\beta}{t_k}x};\\
&\bar{\sigma}_z(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{c_{13}}{c_{11}}\Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}}{c_{44}}\Delta_2(t_k)\cdot t_k\right]A_k(\alpha)\,e^{-\alpha t_k z};\\
&\bar{\sigma}_z(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{c_{13}}{c_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3} + \frac{c_{33}}{c_{44}}\Delta_2(t_k)\right]B_k(\beta)\,e^{-\frac{\beta}{t_k}x};\\
&\bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{c_{44}}{c_{11}}\Delta_1(t_k)\cdot t_k + \Delta_2(t_k)\right]A_k(\alpha)\,e^{-\alpha t_k z};\\
&\bar{\tau}_{zx}(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{c_{44}}{c_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}\right]B_k(\beta)\,e^{-\frac{\beta}{t_k}x}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем (2)

$$
B_k(\beta) = C_k B_1(\beta) \qquad A_k(\alpha) = a_k A_1(\alpha) + \varphi_k(\alpha)
$$

$$
\left|\begin{aligned}
&\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\sin\beta z\,d\beta = \frac{c_{11}}{m_{11}}f_1(z) && 0 < z \leqslant a\\
&\int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\sin\beta z\,d\beta = \frac{1}{m_{12}}\sum_{k=1}^{2}a_{2k}\int_0^\infty \alpha^2 A_k(\alpha)\,e^{-\alpha t_k z}\,d\alpha && a < z < \infty
\end{aligned}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha = \frac{1}{n_{11}}f_2(x) - \frac{2}{\pi}\frac{a_{13}}{a_{12}n_{11}}\sum_{j=1}^{2}b_{1j}C_j t_j^3\times\\
&\qquad\times\int_0^\infty \alpha\cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{t_j^2\alpha^2 + \beta^2}\,d\beta\\
&\int_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha = -\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{2}\Delta_2(t_j)C_j\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\,e^{-\frac{\beta}{t_j}x}\,d\beta -\\
&\qquad-\frac{1}{\pi}\frac{\Delta_2(t_2)}{n_{12}a_{13}}\sum_{j=1}^{2}b_{1j}C_j\int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\,e^{-\frac{\beta}{t_j}x}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Здесь

$$
C_1 = 1; \quad C_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}; \quad b_{1k} = \frac{c_{44}}{c_{11}}\frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}; \tag{9}
$$

$$d_1 = 1; \quad d_2 = \frac{b_{11}}{b_{12}}; \quad a_{1k} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) \cdot t_k + \Delta_2(t_k);$$

$$\varphi_1(\alpha) = 0; \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{a_{12}} \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j t_j^2 \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{t_j^2 \alpha^2 + \beta^2} d\beta;$$

$$m_{11} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\Delta_1(t_k) C_k}{t_k^2}; \qquad m_{12} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} \cdot C_k; \tag{9}$$

$$a_{2k} = \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k; \qquad a_{3k} = \frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k;$$

$$n_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \alpha_k; \qquad n_{12} = \sum_{k=1}^{2} \Delta_2(t_k) \cdot a_k.$$

Подобные системы „парных“ уравнений рассматривались в работах ([3, 4]) и др.

Используя результаты ([3]), из (8) получаем:

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^{a} \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi\beta} \int_a^{\infty} r F(r) J_0(\beta r) dr;$$

$$A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_0^{b} t \varphi_2(t) J_0(\alpha t) dt - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_2(t_j)}{t_j} C_j \int_0^{\infty} \beta^2 B_1(\beta) d\beta \times$$

$$\times \int_b^{\infty} t K_0\left(\frac{\beta}{t_j} t\right) J_0(\alpha t) dt - \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta_2(t_2)}{n_{12} a_{12}} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j \frac{1}{t_j} \times \tag{10}$$

$$\times \int_0^{\infty} \beta^3 B_1(\beta) d\beta \int_0^{\infty} t K_0\left(\frac{\beta}{t_j} t\right) J_0(\alpha t) dt,$$

где

$$\varphi_1(r) = \frac{c_{11}}{m_{11}} \frac{d}{dr} \int_0^{r} \frac{z f_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz; \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{n_{11}} \int_0^{t} \frac{f_2(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}};$$

$$F(r) = \frac{1}{m_{12}} \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_k(\alpha) K_0(\alpha t_k r) d\alpha; \tag{11}$$

$J_i(x)$ — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом; $K_j(y)$ — функции Макдональда.

Исключая теперь $A_1(\alpha)$ из соотношений (10) и (11), для определения функции $\beta B_1(\beta) = B(\beta)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta) = \Omega(\beta) + \int_{0}^{\infty} B(\gamma)\, K(\gamma, \beta)\, d\gamma. \tag{12}$$

Показано, что решение уравнения (12) может быть найдено методом последовательных приближений. Решая интегральное уравнение (12) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $B(\beta)$. Далее, по формулам $B_1(\beta) = \frac{B(\beta)}{\beta}$ (10), (8), (11), (7), (6), (4)—(2) последовательно можно определить все искомые величины поставленной задачи.

Институт механики Академии наук Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության համար համաչափ կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած վերջավոր երկարության ճեղք ունեցող առաձգական, օրթոտրոպ կիսահարթության համաչափ կոնտակտային խնդիրը։ Կիսահարթության եզրին ճնշում է ճեղքի առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կամայական ողարկ հիմքով կոշտ դրոշմը։ Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին լարումներից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումներ։ Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակ և խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով։

Խնդրի լուծումը բերվում է «զույգ» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած երկու հավասարումների համակարգի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Р. Кристенсен.* Введение в механику композитов, Мир, М., 1982. 2 *И. С.*
Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука,
М., 1971. 3 *С. А. Мелкумян.* ДАН АрмССР, т. 54, № 2, с. 87—93 (1972). 4 *Я. С.*
Уфлянд, Метод парных уравнений в задачах математической физики, Наука, Л.,