

МЕХАНИКА

УДК 532.516

И. И. Петросян

Несимметричная модель задачи Громеки о движении жидкости в  
круглой цилиндрической трубе

(Представлено чл.-корр. АН Армении Г. Е. Багдасаряном 11/XII 1990)

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несимметричной жидкости в неограниченной круглой трубе радиуса  $R$ . Будем считать жидкость несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ). Полагая, что во все время движения скорости жидких частиц направлены параллельно оси трубы  $z$ , будем иметь  $v_r = v_\varphi = 0$ . Тогда из уравнения неразрывности найдем, что  $v_z = w$  не зависит от  $z$ .

Решение этой задачи было дано в работе И. С. Громеки (<sup>1</sup>). Указанное решение было основано на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье—Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (радиус трубы) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде (<sup>2</sup>).

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметричных жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе (<sup>2</sup>). В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жид-

кости, а другое—угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения <sup>(2)</sup>. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать раопределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустановившегося движения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид <sup>(1, 2)</sup>

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}] + \vec{f}, \quad (2)$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_a \nabla \nabla \cdot \vec{\omega} + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + 2c_s \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — массовая плотность,  $p$  — давление,  $I$  — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы,  $\vec{v}$  — вектор скорости точки,  $\vec{\omega}$  — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума,  $\nu$  — кинематическая ньютоновская вязкость,  $\nu_r$  — кинематическая вращательная вязкость,  $c_a$ ,  $c_d$ ,  $c_s$  — коэффициенты моментной вязкости,  $d(...)/dt$  — полная производная по времени,  $\nabla$  — пространственный градиент,  $(\nabla \vec{v})^d$  и  $(\nabla \vec{\omega})^d$  — симметричные части соответствующих див,  $(\nabla \vec{v})^a$  и  $(\nabla \vec{\omega})^a$  — антисимметричные дивы,  $\vec{f}$  — вектор массовой силы,  $\vec{c}$  — вектор массового момента.

Если пренебречь массовыми силами и массовыми моментами, то уравнения поступательного движения и вращательного движения представляются в виде

$$r \frac{\partial \omega}{\partial t} = (\nu + \nu_r) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2\nu_r \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = (c_a + c_d) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - 2\nu_r \frac{\partial \omega}{\partial r} - 4\nu_r \omega \quad (5)$$

$$(v_z = w(r, t), \quad \omega_r = \omega(r, t)).$$

Из (4) следует, что  $\partial p / \partial z$  не зависит от  $z$  и может быть только функцией времени  $t$ . Мы будем рассматривать случай, когда жидкость в начальный момент  $t = 0$  находится в покое, а установившийся в этот момент перепад давления  $\partial p / \partial z = \text{const}$ .

Предполагаем, что жидкость прилипает к границам трубы при  $r=R$ , тогда начальные и граничные условия будут:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad w=0, \quad \omega=0 \\ \text{при } r=R \quad (t>0) \quad w=0, \quad \omega=0. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно идее работы (4) инерционные члены в уравнениях движения (4) и (5) заменим приближенными выражениями, т. е.  $dw/dt$  и  $d\omega/dt$  заменим их средними по радиусу значениями\*

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial w}{\partial t} dr, \quad \psi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial \omega}{\partial t} dr. \quad (8)$$

Общие решения уравнений (4) и (5) с учетом (7) и (8) при начальных и граничных условиях (6) имеют вид\*\*

$$\omega = - \left[ r^* - \frac{I_1(\lambda r^*)}{I_1(\lambda)} \right] \left[ \frac{R}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{R}{4\nu} \varphi(t) \right], \quad (9)$$

$$w = \left( 1 - r^{*2} + \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right) \left[ w_0 - \frac{R^2}{4\nu} \varphi(t) \right], \quad (10)$$

где

$$w_0 = - \frac{R^2}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad \lambda = kR,$$

$$k = \left( \frac{\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_z + c_d} \right)^{1/2}, \quad \varphi(t) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \exp \left( - \frac{6\nu}{aR^2} t \right),$$

$$a = 1 + \frac{3\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I_1(\lambda)} \left[ I_0(\lambda) + \frac{1}{R} \int_0^R I_0(kr) dr \right]. \quad (11)$$

Здесь  $w_0$  — максимальная по сечению скорость на оси трубы в классическом течении Пуазейля,  $I(\dots)$  — модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции первого рода.

Подставив из (11) значение  $\varphi(t)$  в (10), получаем

$$w^* = \frac{w}{w_0} = \left[ 1 - r^{*2} + \frac{2\mu_r}{\mu + \mu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right] (1 - e^{-6t/t_1}), \quad (12)$$

где

$$\mu_r = \rho\nu_r, \quad \mu = \rho\nu.$$

Здесь  $t_1 = \frac{\pi t}{\rho R^2}$  — критерий Фурье.

Решение (12) переходит в классическое при  $\mu_r = 0$ , и (9) дает  $\omega = 0$ , а (11) —  $a = 1$  (4).

\* Оценки степени точности идеи осреднения, приведенные в работе (4), показали ее практическую приемлемость (4, 6).

\*\* Осреднение вращательного ускорения, вызванное проекцией псевдовектора  $\omega$ , произведено по диаметру трубы. Это дает  $\psi(t) = 0$ .

Воспользовавшись формулой (12), вычислим расход

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = \left\{ 1 - \frac{8\mu_r}{\mu + \mu_r} \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda}{2} \frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 1 \right] \right\} (1 - e^{-6.1t_1}), \quad (13)$$

где  $Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}$ .

Здесь  $Q_0$  — расход жидкости в классическом течении Гагена—Пуазейля

В пределе при  $t = \infty$  решения (12) и (13) переходят в решения стационарной задачи (\*).

Профили скоростей для различных значений  $\mu_r/\mu$  (при  $\lambda = 1$ ) показаны на рис. 1, 2.

Рис. 1. Профили скоростей для разных моментов времени при  $\mu_r/\mu = 0$

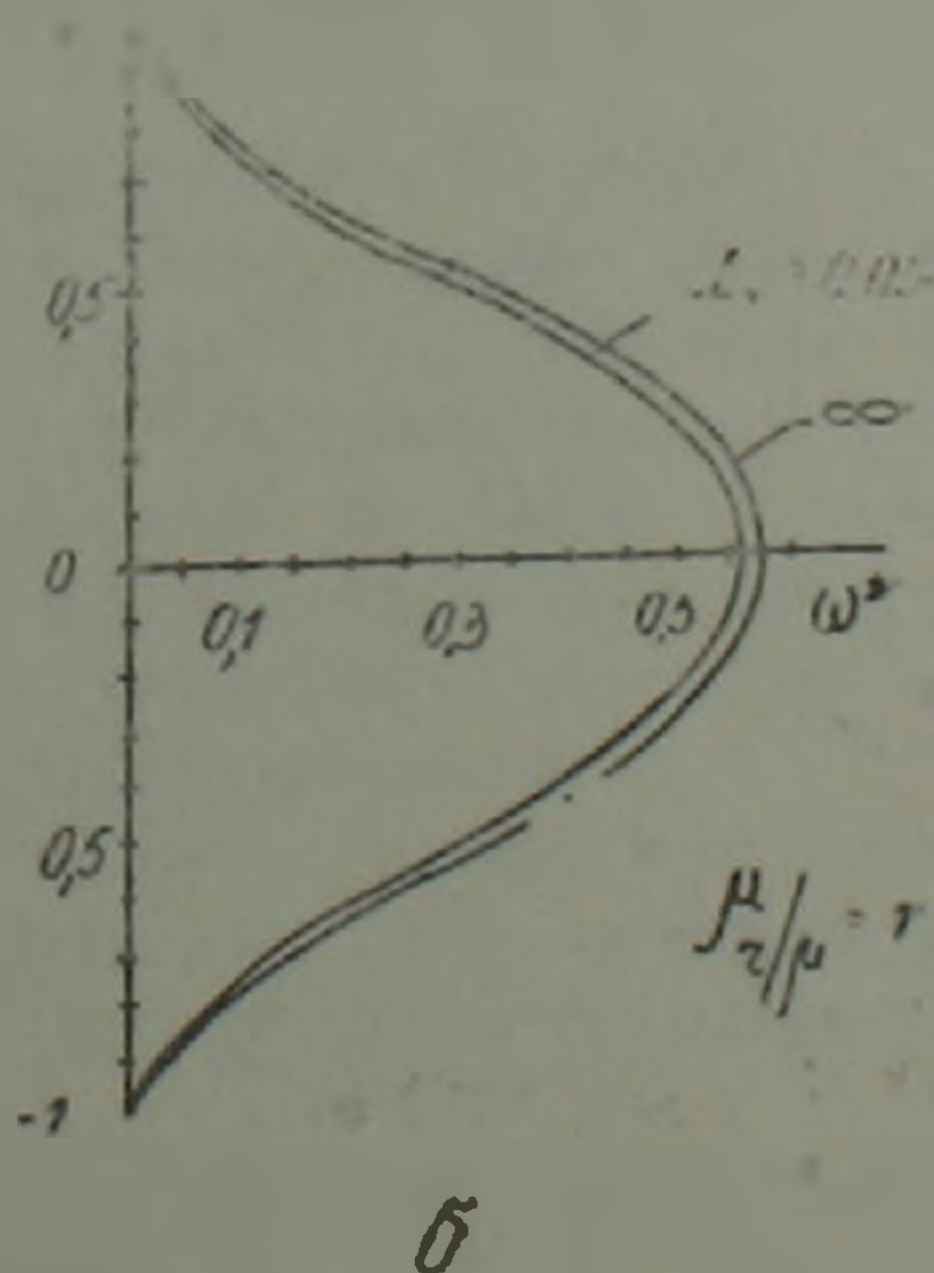
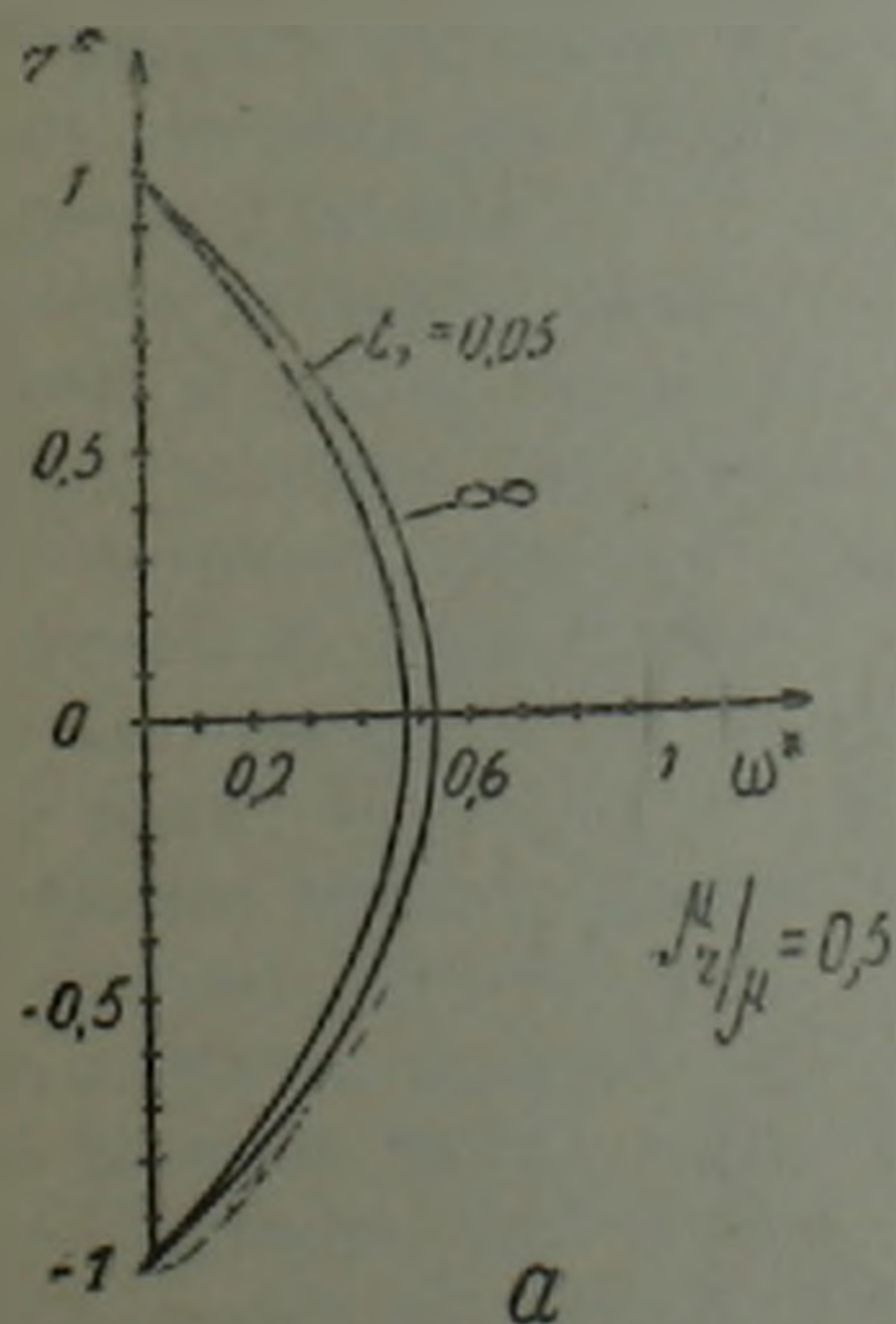
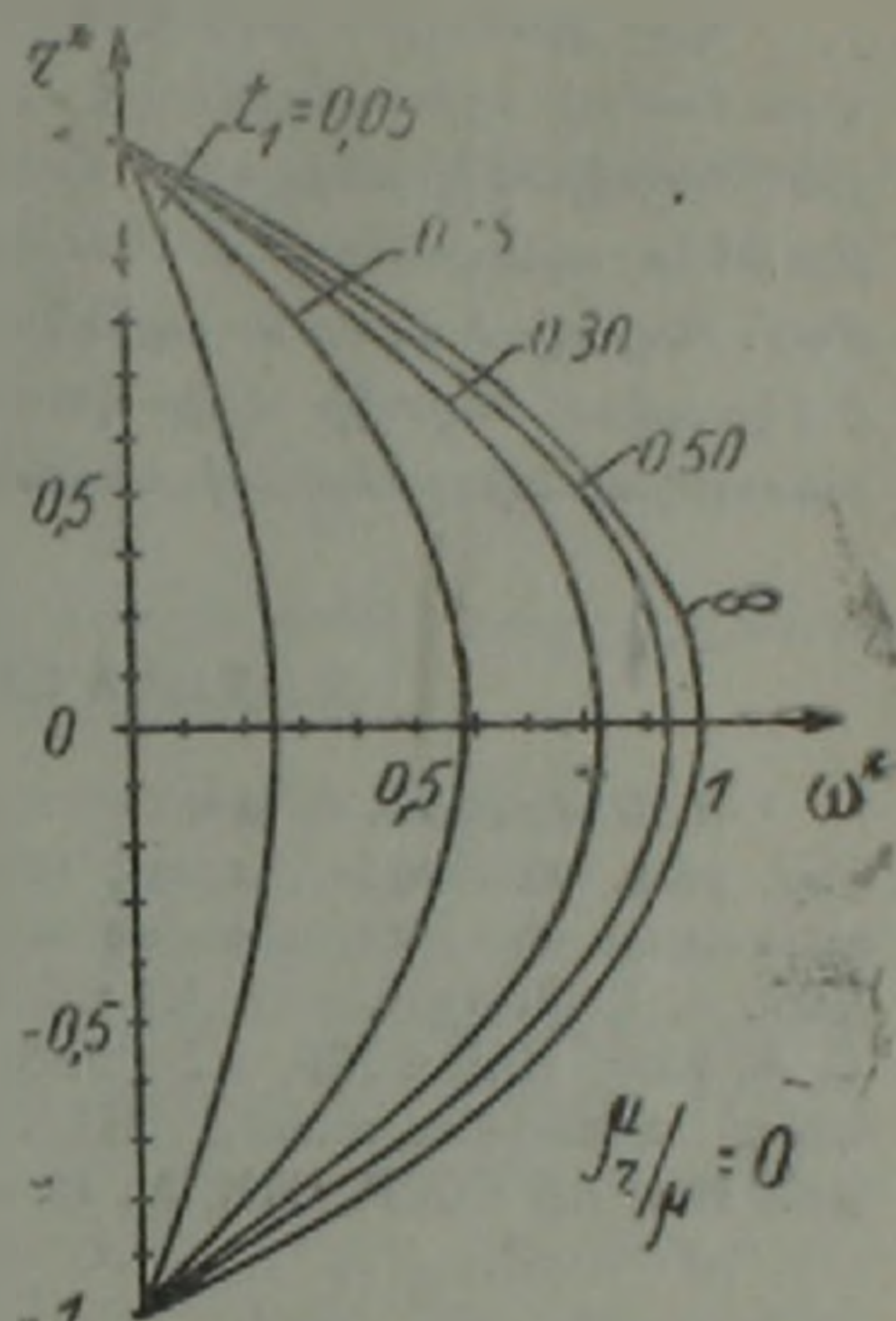


Рис. 2. Профили скоростей для моментов времени  $t_1 = 0.05; \infty$  при:  
а)  $\mu_r/\mu = 0.5$ ; б)  $\mu_r/\mu = 1$

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений  $\mu_r/\mu$  уменьшается время установления стационарного режима течения.

**Կլոր գլանային խողովակում հեղուկի շարժման մասին Գրոմեկայի խնդրի ոչ սիմետրիկ մոդելը**

Կլոր գլանային խողովակում շահատարված հոսքի մասին խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության և մասնիկի պտտման անկյունային արագության համար: Պարզված է, որ ստացիոնար հոսքի հաստատման ժամանակը փոքրանում է (կախված հեղուկի միկրոկառուցվածքից), նյութոնյան հեղուկի դասական տեսության արդյունքների համեմատությամբ:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> И. С. Громeka, К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Изд. унив. типографии, Казань, 1882. <sup>2</sup> Л. Г. Петросян, Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений, Изд-во ЕГУ, 1984. <sup>3</sup> Hagen Вак Дьел, А. Т. Листров, Изв. АН СССР. МЖГ, № 5, с. 132—136, 1967. <sup>4</sup> Н. А. Слезкин, С. М. Тарг, ДАН СССР, т. 54, № 3, с. 205—208 (1946). <sup>5</sup> С. М. Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений, ГИИТЛ, М.—Л., 1951. <sup>6</sup> А. А. Аббасов, А. Х. Мирзаджанзаде, Изв. АН СССР. СТН, № 12, с. 122—124, 1955.