ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519

О. А. Галстян

Об одном алгоритме нахождения подграфа инвариантного относительно минимальных доминирующих множеств заданного графа

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 11/X 1990)

Рассмотрим граф $G=(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер. Обозначим через $V(u)$ множество всех вершин v, для которых $d(u, v) \leq 1$, где $d(u, v)$ — расстояние между вершинами u и v, а через $G_{u,v}$ — граф, полученный из G добавлением ребра, связывающего несмежные вершины u и v (1).

Пусть $U \subseteq V$ — доминирующее множество графа G (2), т. е. $V = \bigcup_{u \in U} V(u)$. Обозначим через $\Pi(G)$ множество всех доминирующих множеств, а через $M(G)$ — множество всех минимальных доминирующих множеств графа G.

Вершину $u \in V$ назовем регулярной, если существует вершина $v \in V$, $v \neq u$ такая, что $V(v) \subseteq V(u)$ (3); вершину v назовем вершиной регулярности для u (1). Обозначим через $R_G(u)$ множество всех вершин регулярности для вершины u в графе G.

Вершины u и v в графе G назовем эквивалентными относительно доминирующих множеств, если $\Pi(G) = \Pi(G')$, где G' — граф, полученный из G переобозначением вершин u и v (1). В работе (1) сформулировано следующее утверждение.

Теорема. *Несмежные вершины u и v графа G являются эквивалентными относительно доминирующих множеств тогда и только тогда, когда $V(u) \setminus \{u\} = V(v) \setminus \{v\}$. Смежные вершины u и v графа G являются эквивалентными относительно доминирующих множеств тогда и только тогда, когда $V(u) = V(v)$ или для любой вершины $w \in V(u) \setminus V(v)$ выполняется $R_{G_{w,v}}(w) \subseteq V(u)$ и для любой вершины $w \in V(v) \setminus V(v)$ выполняется $R_{G_{w,u}}(w) \subseteq V(v)$.*

Легко заметить, что эквивалентность вершин графа относительно доминирующих множеств является отношением эквивалентности и множество V вершин графа G разбивается на классы эквивалентности $V_1, V_2, \ldots, V_p$.

В этой работе для заданного графа G дается описание структуры подграфов, порожденных классами эквивалентности вершин относительно доминирующих множеств; кроме того, предложен алгоритм для нахождения подграфа G' графа G, удовлетворяющего условию $M(G') \subseteq M(G)$.

Обозначим через $G(m, n)$ множество графов $G(m, n) = \{G = (V, E) / |V| = m$ и для любой вершины $v \in V$ $\deg_G v \geqslant n\}$, где $\deg_G v$ — степень вершины v в графе G, т. е. если $G \in G(m, n)$, то степень любой вершины в графе G не меньше числа n. В частности, при $n = m - 1$ $G(m, m-1)$ состоит из одного m-вершинного полного графа. В дальнейшем $G(m, m-1)$ будем отождествлять с m-вершинным полным графом.

Через $\overline{G}(m, m-1)$ обозначим дополнение графа $G(m, m-1)$, т. е. $\overline{G}(m, m-1)$ есть m-вершинный пустой граф, а через $G(U)$, где $U \subseteq V$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин U.

Пусть $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ — множество классов эквивалентности графа G относительно доминирующих множеств и $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Т е о р е м а 1. *Если* $|V_k| = m \geqslant 2$, *то*

$$G(V_k) \in G(m, m-2) \cup \{\overline{G}(m, m-1)\}.$$

Сформулируем предварительно два утверждения, в справедливости которых нетрудно убедиться и которые используются при доказательстве теоремы 1.

Пусть $T(G)$ — множество всех тупиковых* доминирующих множеств графа G.

У т в е р ж д е н и е 1. *Если в графе G вершины u и v не смежные, то существует множество $U \in T(G)$ такое, что $\{u, v\} \subseteq U$.*

У т в е р ж д е н и е 2. *Если в графе G вершины u и v эквивалентны относительно доминирующих множеств и множество $U \in T(G)$ удовлетворяет условиям $u \in U$, $v \bar{\in} U$, то имеет место*

$$(U \setminus \{u\}) \cup \{v\} \in T(G).$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть $|V_k| = m$, то, что подграф $G(V_k)$ графа G может совпадать с графом $\overline{G}(m, m-1)$, следует из вышеприведенной теоремы.

Докажем, что если $G(V_k) \neq \overline{G}(m, m-1)$, то любая вершина $v \in V_k$ удовлетворяет условию $\deg_{G(V_k)} v \geqslant m-2$. Предположим обратное. Пусть существует вершина $u \in V_k$ такая, что $\deg_{G(V_k)} u < m-2$, т. е. существует $\{v, w\} \subseteq V_k$ такое, что $\langle u, w \rangle \bar{\in} E$, $\langle u, v \rangle \bar{\in} E$. Поскольку $G(V_k) \neq G(m, m-1)$, то из указанной теоремы следует, что существует вершина $z \in V_k$ такая, что z смежна со всеми вершинами множества $\{u, v, w\}$. Из утверждения 1 следует, что суще-

---

* $U \in \Pi(G)$ называется тупиковым, если не существует множества $U' \subset U$ такого, что $U' \in \Pi(G)$.

ствует $U \in T(G)$ такое, что $\{u, v\} \subseteq U$. Так как $\{u, v, w\} \subseteq V_k$, то и вершина $w \in U$. Рассмотрим множество $U' = (U \setminus \{w\}) \cup \{z\}$. Так как $\{z, w\} \subseteq V_k$, то по утверждению 2 получаем, что $U' \in T(G)$. Однако легко заметить, что $U' \setminus \{v\} \in \Pi(G)$ и, следовательно, $U' \notin T(G)$. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Исходя из классов $V_1, V_2, \ldots, V_p$ дадим алгоритм для построения графа G', инвариантного относительно минимальных доминирующих множеств заданного графа G. Обозначим через R_k, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, множество $R_k = \{v / V(v) \subseteq V_k\}$.

Из множества вершин V графа G выделим подмножество V' согласно следующему нижеизлагаемому алгоритму:

шаг 0. $V' := \varnothing$ (пустое множество);

шаг К. $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Если $|V_k| = 1$, то $V' := V' \cup V_k$.

Если $G(V_k) = G(m, m-1)$ и $R_k \neq \varnothing$, где $m = |V_k|$, из множества R_k выбираем одну произвольную вершину v и $V' := V' \cup \{v\}$.

Если $G(V_k) = G(m, m-1)$ и $R_k = \varnothing$, то $V' := V' \cup V_k$.

Если $|V_k| = m$ и $G(V_k) \in G(m, m-2)$, $G(V_k) \neq G(m, m-1)$, то из множества V_k выбираем все вершины u, для которых $\deg_{G(V_k)} u = m-1$, а также две любые несмежные вершины и добавляем их к множеству V'.

Если $G(V_k) = \bar{G}(m, m-1)$ и $m \geqslant 3$, то из V_k выбираем три произвольные вершины u, v, w и $V' := V' \cup \{u, v, w\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *$M(G') \subseteq M(G)$, где $G' = G(V')$.*

Ереванский государственный университет

Հ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Գրաֆի մինիմալ գերիշխող բազմության նկատմամբ ինվարիանտ ենթագրաֆի գտնելու մի ալգորիթմի մասին

Աշխատանքում տրվում է G գրաֆի գագաթների բազմության տրոհումը գերիշխող բազմությունների նկատմամբ համարժեքության դասերի և այդ դասերով ծնված ենթագրաֆների կառուցվածքային նկարագիրը։ Նկարագրված է նաև ալգորիթմ, որը G գրաֆի համար գտնում է մինիմալ գերիշխող բազմության նկատմամբ ինվարիանտ G' ենթագրաֆը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян*, в кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Тезисы докл. IV Всесоюзн. совещания, Новосибирск, 1949. 2 *М. Гэри, Д. Джонсон*, Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Мир, М., 1982. 3 *Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян*. Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 2 (1979).