ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

С. С. Казарян

Мультипликативное дополнение в пространствах Орлича

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 22/I 1991)

В работах К. С. Казаряна ([1-3]) были изучены вопросы мультипликативного дополнения до базиса в L^p, $1 \leqslant p < \infty$, неполных ортонормированных систем. В настоящей заметке анонсируются теоремы, обобщающие основные результаты приведенных работ для пространств Орлича.

Сперва дадим определения понятий ([1, 4]), которые понадобятся для сформулирования результатов.

Функция $\Phi(t)$ называется функцией Юнга, если она допускает представление

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi(\tau)$ — положительная при $\tau > 0$, непрерывная справа при $\tau \geqslant 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$ и $\lim\limits_{\tau\to\infty} \varphi(\tau) = +\infty$.

Дополнительная к $\Phi(t)$ функция $\Psi(t)$ определяется следующим образом:

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup\{s : \varphi(s) \leqslant \tau\}$.

Будем говорить, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию, если $\Phi(2t) < B\Phi(t)$. Это условие эквивалентно более общему условию $\Phi(At) < B\Phi(t)$, $A > 1$.

Определение 1. *Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве E, $\mu(E) > 0$, имеет свойство (A) на измеримом множестве F, $F \subset E$, $\mu(F) > 0$, если существует положительное число a такое, что для любого натураль-*

ного числа N_1 найдется такое натуральное число N_2, что имеет место равенство

$$\mu\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} E_k\right) = \mu(F),$$

где $E_k = \{x : |\varphi_k(x)| \geqslant \alpha\} \cap F$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(t)$ — некоторая функция Юнга и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система ограниченных функций, полная в $L^1(E)$, которая содержит равномерно ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, обладающую свойством (A) на множестве E. Тогда для любого натурального числа N и для произвольной измеримой функции $M(x)$ система $\{M(x) f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является базисом в пространстве Орлича $L^{\Phi}(E)$.*

Из теоремы 1 получается

Следствие 1. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Уолша, или тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, если удалить из $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конечное число функций, то какова бы ни была измеримая функция $M(x)$, система, полученная умножением оставшихся функций на $M(x)$, не будет базисом ни в одном из пространств Орлича L^{Φ}.*

При доказательстве следующей теоремы были использованы определения понятий нижнего и верхнего индексов функции Юнга, а также свойства следующей функции:

$$\underline{S}_{\Phi}(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

Сведения об этих понятиях даны в работах [5–7].

Теорема 2. *Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Допустим, что для интервалов Хаара $\Delta_k^{(i_k)}$ $(\Delta_0^{(i_0)} \supset \Delta_1^{(i_1)} \supset \cdots \supset \Delta_k^{(i_k)} \supset \cdots)$, где $|\Delta_k^{(i_k)}| = 2^{-k}$, функция $w(x)$ удовлетворяет условиям*

$$[w(x)]^{-1} \overline{\in} L^{\Psi}_{\Delta_k^{(i_k)}}; \qquad [w(x)]^{-1} \in L^{\Psi}_{C\Delta_k^{(i_k)}},$$

причем $C\Delta_k^{(i_k)} = [0, 1] \setminus \Delta_k^{(i_k)}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) *Существует число $D_{\Phi} > 0$ такое, что*

$$\frac{1}{|\Delta_k^{(i_k)}|} \|\chi_{\Delta_k^{(i_k)}} w\|_{L^{\Phi}_{\xi}} \left\| \frac{\chi_{C\Delta_k^{(i_k)}}}{\xi w} \right\|_{L^{\Psi}_{\xi}} < D_{\Phi}$$

и для каждого интервала Хаара Δ, который не совпадает ни с одним из $\Delta_k^{(i_k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, имеем

$$\frac{1}{|\Delta|}\,\|\chi_\Delta w\|_{L^\Phi_\xi}\left\|\frac{\chi_\Delta}{\xi w}\right\|_{L^\Psi_\xi} \leqslant D_\Phi,$$

где $\xi > 0$ *произвольное положительное число.*

(б) *Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что для произвольного числа $\xi > 0$*

$$\| S_m(f, x)\|_{L^\Phi_\xi(0,1)} < C_\Phi \|f\|_{L^\Phi_\xi(0,1)},$$

где $S_m(f, x) = \sum\limits_{k=2}^{m} c_k w(x)\chi_k(x)$ и $c_k = \int\limits_0^1 f(t)\varphi_k(t)\,dt$; $\{\varphi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ — *система функций, сопряженная к* $\{w(x)\chi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$, а $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *система Хаара.*

(в) *Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$ такая, что*

$$\int\limits_0^1 \Phi(S_m(f, x))\,dx \leqslant C'_\Phi \int\limits_0^1 \Phi(f(x))\,dx.$$

Аналог этой теоремы доказывается и в том случае, когда из системы Хаара отбрасывается конечное число функций.

Теорема 3. *Пусть функция Юнга* $\Phi(t)$ *и дополнительная к ней функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют* Δ_2 *условию. Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Хаара и для интервалов Хаара*

$$\Delta_k^{(i_k)} \quad (\Delta_0^{(i_0)} \supset \Delta_1^{(i_1)} \supset \cdots \supset \Delta_k^{(i_k)} \supset \cdots),$$

где $|\Delta_k^{(i_k)}| = 2^{-k}$, *функция* $w(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$|w(x)|^{-1} \in L^\Psi_{\Delta_k^{(i_k)}}; \qquad |w(x)|^{-1} \in L^\Psi_{C\Delta_k^{(i_k)}},$$

причем $C\Delta_k^{(i_k)} = [0, 1] \setminus \Delta_k^{(i_k)}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *Система* $\{w(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является базисом в пространстве Орлича* L^Φ.

(б) *Система* $\{w(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является безусловным базисом в пространстве Орлича* L^Φ.

Институт математики Академии наук Армении

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Մուլտիպլիկատիվ լրացում Օրլիչի տարածությունում

Օրլիչի L^Φ տարածությանը պատկանող $w(x)$ ֆունկցիայի համար գտնվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որի դեպքում Հաարի սիստեմից վեր-

ջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո, մնացած ֆունկցիաների բազմությունը բազմապատկելով այդ ֆունկցիայով, ստանում ենք բազիս և ոչ պայմանական բազիս։ Նշված է, որ որոշակի պայմանների բավարարող օրթոնորմալ համակարգերի համար հնարավոր չէ այդ ճանապարհով բազիս ստանալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] К. С. Казарян. ДАН АрмССР, т. 52, № 4, с. 203—209 (1976). [2] *К. С. Казарян*, Analysis Math., v. 4, № 1, p. 37—52 (1978). [3] *K. S. Kazarian*, Studia Math., v. 71, p. 227—249 (1982). [4] *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий*, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958. [5] *W. Matusjewska, W. Orlicj*, Bull. Acad. Polon. Sci., v. 8, № 7, p. 439—443 (1960). [6] *J. Gustasvon, J. Peetre*, Studia Math., v. 60, p. 33—59 (1977). [7] *С. С. Казарян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4, с. 358—377 (1987).