ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян

Об одном бесконечномерном обобщении классической теоремы Брауэра об инвариантности области

(Представлено чл.-корр. АН Армении В. С. Захаряном 27/XII 1990)

В статье приводятся некоторые бесконечномерные обобщения (теоремы 1,5) теоремы Борсука о нечетности топологической степени нечетного отображения ([1]) и теоремы Брауэра об инвариантности области ([2]). Эти конечномерные классические теоремы перестают быть справедливыми в бесконечномерных пространствах в классе всех непрерывных отображений подмножеств этих пространств. Вместе с тем оказывается, что справедливы некоторые бесконечномерные аналоги упомянутых выше теорем в действительном гильбертовом пространстве H, если рассматривать, однако, лишь отображения, принадлежащие одному допустимому классу K непрерывных отображений подмножеств пространства H.

Определение и ряд основных свойств класса K приведены в ([3,4]).

Определение 1. *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H и $f: G \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f в точке $x_0 \in G$ принадлежит классу K, если выполнено следующее условие: для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L \subset H$ и действительное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| < \varepsilon\|x - y\|.$$

Будем говорить, что отображение $f: G \to H$ принадлежит классу K на G, если в каждой точке $x_0 \in G$ принадлежит классу K.

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна ([3]), она называется терминальной производной отображения f.

Пусть теперь M — произвольное подмножество пространства H и $f: M \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K, если существуют открытое в H подмножество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \to H$ такое, что $g \in K$ и $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Отображения, принадлежащие классу K, обладают рядом удачных свойств. В частности, эти отображения локально (т. е. в окрестности каждой точки x_0) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где I — тождественный оператор H, A — вполне непрерывный оператор, а λ — действительное число, которое, однако, зависит от точки x_0.

С помощью распространения идеи Лере и Шаудера на класс K, построена ([1]) топологическая степень отображений $f: G \to H$, принадлежащих некоторому подклассу класса K. А именно: если G — открытое подмножество пространства H, $f: G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K, а $b \in f(G)$ — такая точка, что прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на X отлична от нуля, то определено некоторое целое число $\deg(f, G, b)$, называемое степенью отображения f в точке b.

В дальнейшем отображения, принадлежащие классу K, мы будем называть K-отображениями.

Теорема 1. *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H, содержащее нулевую точку O и симметричное относительно O. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное (т. е. $f(-x) = -f(x)$) K-отображение, удовлетворяющее следующему условию:*

c) прообраз $x = f^{-1}(O)$ точки O компактен и на нем терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f отлична от нуля. Тогда определена степень $\deg(f, G, 0)$ отображения f в точке O, и она нечетна.

Теорема 2. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки O и такое, что $O \in \overline{G}$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное K-отображение, обладающее тем свойством, что прообраз $x = f^{-1}(O)$ непуст, компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на всем X отлична от нуля. Тогда степень $\deg(f, G, O)$ отображения f в точке O четна.*

Теорема 3. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки O и такое, что $O \in G$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное K-отображение. Тогда, если прообраз $X = f^{-1}(O)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на X отлична от нуля, то для любого линейного подпространства $H^{(1)}$ коразмерности 1 пространства H имеет место условие*

$$f(G) \cap (H \setminus H^{(1)}) \neq \varnothing.$$

Теорема 4. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно точки O и такое, что $O \in G$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — K-отображение, удовлетворяющее следующим условиям*

1) $f^{-1}(O) = \{O\}$

2) *терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в точке O отлична от нуля;*

3) *для любой точки $x \neq 0$ векторы $f(x)$ и $f(-x)$ направлены неодинаково, т. е. $\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$. Тогда степень* $\deg(f, G, O)$ *определена и нечетна.*

Лемма. *Пусть M — подмножество гильбертова пространства H и $f: M \to H$ — некоторое K-отображение. Пусть, далее, для точки $x_0 \in M$ выполнены следующие условия:*

1) *точка x_0 является внутренней точкой M относительно H;*

2) *отображение f инъективно в некоторой окрестности U точки x_0 относительно H;*

3) *значение терминальной производной $\lambda_f(x)$ отображения f в точке x_0 отлично от нуля.*

Тогда $f(x_0)$ является внутренней точкой $f(M)$ относительно H.

Из леммы непосредственно следует следующее бесконечномерное обобщение классической теоремы Брауэра об инвариантности области ([3]).

Теорема 5. (о K-инвариантности области). *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H и $f: G \to H$ локально инъективное, в частности, инъективное K-отображение, обладающее тем свойством, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в каждой точке $x \in G$ отлична от нуля. Тогда $f(G)$ является открытым подмножеством пространства H.*

Замечание. *В теореме 5 принадлежность отображения f к классу K существенна.*

В самом деле, пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — некоторый ортонормированный базис пространства H, а $T: H \to H$ линейный ограниченный оператор, задаваемый по формуле: $T(e_n) = e_{n+1}$, т. е. для любой точки $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n + \cdots$ пространства H $T(x) = x_1 e_2 + x_2 e_3 + \cdots + x_n e_{n+1} + \cdots$. Оператор T не принадлежит классу K и гомеоморфно отображает пространство H на неоткрытое в H линейное подпространство $H^{(1)}$ коразмерности 1.

Определение 2. *Гомеоморфизм $f: X \approx Y$ между подмножествами X и Y гильбертова пространства H называется K-гомеоморфизмом, если отображение f и обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ являются K-отображениями.*

Теорема 6. *Пусть $f: X \approx Y$ — K-гомеоморфизм. Тогда образ $f(x_0)$ внутренней точки x_0 множества X является внутренней точкой множества Y, а образ $f(x_0)$ граничной точки x_0 множес-*

ства X является граничной точкой множества Y, в частности, если X открыто в H, то и множество Y открыто в H.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Տիրույթի ինվարիանտության Բրաուէրի դասական թեորեմի մի անվերջչափանի ընդհանրացման մասին

Հայտնի է, որ տոպոլոգիայի մի շարք դասական թեորեմներ դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջչափանի տարածություններում։

Հոդվածում բերված են Բորսուկին և Բրաուէրին պատկանող այդպիսի թեորեմների անվերջչափանի ընդհանրացումներ H իրական Հիլբերտյան տարածության համար։ Բերենք այդ ընդհանրացումներից մեկի ձևակերպումը.

Թ ե ո ր ե մ (տիրույթի K-ինվարիանտության մասին)։ Դիցուք G-ն H տարածության բաց բազմություն է և $f:G\to H$ լոկալ ինյեկտիվ, մասնավորապես ինյեկտիվ K-արտապատկերում, որի $\lambda(x)$ թերմինալ ածանցյալը G-ին պատկանող յուրաքանչյուր x կետում տարբեր է զրոյից։ Այդ դեպքում $f(G)$ բազմությունը հանդիսանում է H տարածության բաց բազմություն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Ниренберг.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. Мир, М., 1977. [2] *А. Дольд.* Лекции по алгебраической топологии, Мир, М., 1976. [3] *Э. А. Мирзаханян.* Уч. зап. ЕГУ, № 3, 1990. [4] *Э. А. Мирзаханян*, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1991.