ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

И. В. Григорян

Об аналитическом продолжении и представлении функций, принадлежащих замыканиям неполных систем типа Миттаг—Леффлера

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 20/XI 1990)

1. В данной заметке приведены формулировки некоторых результатов об эффективном аналитическом продолжении функций, принадлежащих замыканиям в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$, $-1<\omega<1$,

$$\left(f(x)\in L_{2,\omega}(0, +\infty) \Leftrightarrow \|f\|_{2,\omega(0,+\infty)}=\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^2 x^{\omega}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\right)$$

линейных оболочек неполных систем, порожденных функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu+n\rho^{-1}),\quad z\in\mathbf{C},$$

(как известно [1], при любом конечном $\rho>1/2$ и при любом μ из комплексной плоскости $\mathbf{C}$ $E_\rho(z;\mu)$ является целой функцией порядка ρ и типа 1, причем $E_1(z;1)=\exp(z)$).

2. Мы будем рассматривать системы вида (3), введенные М. М. Джрбашяном [2], установившим следующий результат

Теорема (М. М. Джрбашян). *Пусть*

$$1/2<\alpha<+\infty,\ (1/\rho)+(1/\alpha)=2,\quad -1<\omega<1,\ \mu=(1+\omega+\rho)/(2\rho), \tag{1}$$

$$\{\lambda_k\}_1^{\infty}\subset\Delta(\alpha)=\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z|<\pi/(2\alpha),\quad 0<|z|<+\infty\}, \tag{2}$$

а s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. Тогда для полноты в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ системы типа Миттаг—Леффлера

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)\,x^{s_k-1}\}_1^{\infty} \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^{\alpha}. \tag{4}$$

Отметим, что эта теорема является существенным обобщением известной теоремы Мюнца—Саса ([3]), дающей критерий полноты в $L_2(0, +\infty)$ системы экспонент и переходит в него в специальном случае, когда $\alpha = \rho = \mu = 1$, $\omega = 0$ и $\lambda_j \neq \lambda_m$ при $j \neq m$.

3. Если система экспонент $\{e^{-\lambda_j x}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$, $\lambda_j \neq \lambda_m$ при $j \neq m$) не полна в $L_2(0, +\infty)$, то она порождает некоторое собственное подпространство в $L_2(0, +\infty)$. Описание этого подпространства в случае, когда λ_k вещественны, дано Шварцем ([4]) и А. Ф. Леонтьевым ([5]), а свойства этого подпространства в зависимости от последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ изучены Кусисом ([6]) и Лаксом ([7]).

М. М. Джрбашян ([8, 9]) выявил полную внутреннюю характеристику замыкания в $L_2(0, +\infty)$ линейной оболочки неполной системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$). Более того, если

$$|\arg \lambda_k| \leqslant \frac{\pi}{2}\beta \quad (0 \leqslant \beta < 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-1} < +\infty,$$

им были установлены качественно новые результаты об аналитическом продолжении в угловую область $|\arg z| < \frac{\pi}{2}(1-\beta)$ функций, принадлежащих замыканию в $L_2(0, +\infty)$ линейной оболочки системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, и разложения в ряды по системам обобщенных экспонент продолженных функций.

С. А. Акопян и И. О. Хачатрян ([10]) обобщили результат М. М. Джрбашяна и дали полную внутреннюю характеристику замыкания в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ линейной оболочки неполной системы (3). Кроме того при условии $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(\beta)$ ($\beta > \alpha$) и дополнительном условии $|\lambda_{k+1}|/|\lambda_k| > q > 1$ в работе ([10]) ими было установлено, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается в угловую область $\Delta(\varkappa)$ ($1/\varkappa = (1/\alpha) - (1/\beta)$) и продолженная функция в $\Delta(\varkappa)$ разлагается в ряд по системе $\{E_\rho(-\lambda_k z; \mu)\}_1^\infty$.

4. Для формулировки основной теоремы данной заметки приведем необходимый подготовительный материал.

Нам потребуются две системы функций, введенные в работе В. М. Мартиросяна ([11]) — система рациональных функций $\{R_k(z)\}_1^\infty$ и биортогональная с ней на границе $\partial\Delta(\rho)$ области $\Delta(\rho)$ система функций $\{Z_k(z)\}_1^\infty$. Эти системы определяются следующим образом.

Пусть выполнены условия (1), (2) и пусть $\nu = (\alpha + \omega - 1)/2$. Тогда $R_k(z)$ — это *сумма главных частей* лорановских разложений функций* $G_k(z) = \Phi_k[\varphi(z)](-z)^\nu$, $z \in \Delta^*(\rho) = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta(\rho)}$ в окрестностях

* Всюду рассматриваются главные ветви соответствующих степенных функций.

всех ее отличных друг от друга полюсов, расположенных в точках $z = -\lambda_k$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, где

$$\Phi_k(w) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im}\mu_k}{\pi}}\ \frac{1}{w-\mu_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{w-\mu_j}{w-\overline{\mu}_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$\mu_k = i\lambda_k^{\mu} \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \varphi(z) = -i(-z)^{\mu}\ (z \in \Delta^{*}(\rho)), \tag{6}$$

(об истории возникновения системы (5) см. в ([12])), а $\chi_k(z)$ — это голоморфная в $\Delta^{*}(\rho)$ функция

$$\chi_k(z) = \overline{\Phi_k\left[\overline{\varphi(z)}\right]\ \varphi'(z)(-z)^{\nu}}.$$

5. Введем в рассмотрение две новые системы функций $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{\widehat{\chi}_k(x)\}_1^{\infty}$. А именно, при условиях (1) и (2) для всех k $(k=1, 2, \ldots)$ положим

$$E_k(x) = \frac{x^{1-\mu\rho}}{2\pi\rho}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\tau x^{\rho}}-1}{i\tau}R_k\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)^{1-\mu\rho}d\tau,$$

$$\widehat{\chi}_k(x) = \frac{x^{\rho(\mu-1)}}{i\rho}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau x^{\rho}}-1}{-i\tau}\chi_k\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\tau}|\tau|\right)^{\mu-1}d\tau.$$

Отметим, что функция $E_k(x)$ определена всюду на полуоси $(0, +\infty)$, а $\widehat{\chi}_k(x)$ — почти всюду на $(0, +\infty)$, и отметим некоторые свойства этих функций

Лемма 1. *Системы* $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{\widehat{\chi}_k(x)\}_1^{\infty}$ *биортогональны на* $(0, +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} E_j(x)\,\widehat{\chi}_m(x)\,dx = \begin{cases}1, & j = m,\\ 0, & j \neq m.\end{cases} \quad (j, m = 1, 2, \ldots)$$

Лемма 2. *При всех* n $(n = 1, 2, \ldots)$ *линейные оболочки систем* $\{E_k(x)\}_1^{n}$ и $\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\ \mu)\,x^{s_k-1}\}_1^{n}$ *совпадают.*

Таким образом, при каждом k $(k = 1, 2; \ldots)$ функция $E_k(x)$ является линейной комбинацией функций системы (3).

Опираясь на результаты работы ([11]), легко доказать, что система $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ является базисом Рисса замыкания в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ линейной оболочки системы (3). В частности, если ряд (4) расходится, то $\{E_k(x)\}_1^\infty$ есть базис Рисса пространства $L_{2,\omega}(0, +\infty)$.

6. Для формулировки главного результата заметки нам нужно еще ввести два класса функций.

Пусть

$$1/2 < \alpha \leqslant 1, \quad (1/\alpha) + (1/\rho) = 2, \quad -1 < \omega < 1 \ (\omega \neq 1 - \alpha),$$
$$\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho), \tag{7}$$

$$|\arg \lambda_k| < \pi/(2\varkappa) \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \frac{1}{\alpha} - 1 \leqslant \frac{1}{2\varkappa} < \frac{1}{2\alpha} \tag{8}$$

и пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-\min(\varkappa, 1-\omega)} < +\infty. \tag{9}$$

В предположениях (7), (8), (9) обозначим через $M^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ замыкание в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ линейной оболочки системы (3). Отметим, что из (9) вытекает сходимость ряда (4), поэтому $M^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ является собственным подпространством пространства $L_{2,\omega}(0, +\infty)$.

Обозначим еще через $N^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ класс функций $f(z)$, голоморфных в угловой области $\Delta(\eta)$, $\dfrac{1}{\eta} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\varkappa}$, и представимых там в качестве суммы ряда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k E_k(z), \quad z \in \Delta(\eta),$$

где $\{b_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел (зависящая от $f(z)$), удовлетворяющая лишь условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < +\infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *В условиях* (7)—(9) *имеем*:

1°. *Каждая функция $f(x)$, принадлежащая классу $M^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$, после изменения ее значений на множестве нулевой меры аналитически продолжается в угловую область $\Delta(\eta)$, $1/\eta = (1/\alpha) - (1/\varkappa)$. При этом в каждом угловом секторе*

$$S_{\eta_1}(\delta) = \left\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\eta_1}, \ \delta < |z| < +\infty\right\}$$

$$\left(0 < \delta < +\infty, \ 0 < \frac{1}{\eta_1} < \frac{1}{\eta}\right)$$

выполняется оценка

$$|f(z)| \leqslant A(\delta, \eta_1) \, \|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} |z|^{\rho(1-\mu)}, \quad z \in S_{\eta_1}(\delta), \tag{10}$$

где постоянная $A(\delta, \eta_1) > 0$ не зависит от z и $f(z)$.

2°. *Классы $M^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ и $N^{\varkappa}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ совпадают.*

3°. Каждая функция $f(z)\in M^2_{\omega,\rho}\{\lambda_k\}=N^2_{\omega,\rho}\{\lambda_k\}$ единственным образом разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(f)E_k(z),\qquad b_k(f)=\int_0^{+\infty}f(x)\overline{\gamma_k(x)}\,dx, \tag{11}$$

абсолютно и равномерно сходящийся внутри $\Delta(\eta)$.

4°. Если $\delta>0$, $0<\eta_0<\eta$, то существует постоянная $C(\delta;\eta_0)>0$, не зависящая от n, z и $f(z)$ такая, что

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n-1}b_k(f)E_k(z)\right|\le$$

$$\le C(\delta,\eta_0)\|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|\lambda_k|^{-\min(\omega,1-\omega)}\right\}^{\frac{1}{2}}r^{\mu(1-\omega)}, \tag{12}$$

$$1\le n<+\infty,\quad z\in S_{\eta_0}(\delta)\quad (r=|z|).$$

Таким образом, при $\mu>1$ отрезки ряда (11) равномерно аппроксимируют функцию $f(z)$ на каждом угловом секторе $S_{\eta_0}(\delta)$ с касанием порядка $r^{\mu(1-\omega)}$ в бесконечности.

Отметим, что в специальном случае, когда $\alpha=\rho=\mu=1$ и $\omega=0$, утверждения сформулированной теоремы переходят в соответствующие результаты, установленные М. М. Джрбашяном в работе [8, 9] для обобщенных систем экспонент. Но следует заметить, что в указанном случае в работах [8, 9] вместо (10) и (12) были установлены более сильные оценки, обеспечивающие экспоненциальное убывание в бесконечности для их правильных частей.

Автор благодарен В. М. Мартиросяну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Ն. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ոչ լրիվ համակարգերի փակույթին պատկանող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակության և ներկայացման մասին

Աշխատանքում ստացված են արդյունքներ $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ տարածություններում $(-1<\omega<1)$ Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաներով ծնված ոչ լրիվ

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)x^{s_k-1}\}_1^{\infty}\quad\left(\rho\ge1;\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}\right)$$

համակարգի փակույթին պատկանող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակության և ներկայացման մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219, № 6, с. 1302—1305 (1974). [3] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области. Наука М., 1964. [4] *L. Schwartz*, Etude des sommes d'exponentialles. Actualites scientifiques et industrielles, Paris, 1959. [5] *А. Ф. Леонтьев*, ДАН СССР, т. 72, № 4, с. 621—624 (1950). [6] *P. Koosis*, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, № 4, p. 583—615 (1957). [7] *P. D. Lax*, Comm. Pure Appl, Math., v. 10, № 4, p. 617—622 (1957). [8] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР. т. 141, № 3 с. 539—542 (1961). [9] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб. т. 114 (156), № 1, с. 3—84 (1981). [10] *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 40, № 1 с. 95—111. (1976). [11] *Б. М. Мартиросян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 22, № 6, с. 585—606 (1987). [12] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 14, № 6, с. 446—493 (1979).