

МАТЕМАТИКА

УДК 517.47

А. О. Карапетян

Интегральные представления в трубчатых областях над
афинно-однородными конусами*

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Классическая теорема Винера—Пэли ⁽²⁾ утверждает, что формулой вида

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1)$$

где функция $F(t) \in L^2(0, +\infty)$ произвольна, задается параметрическое интегральное представление пространства Харди H^2 в правой полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$. Этот результат в силу своей важности стал объектом дальнейших обобщений в исследованиях многих авторов. Так, С. Бокнер ⁽³⁾ установил многомерный аналог теоремы Винера—Пэли для пространств Харди H^2 в радиальных трубчатых областях. Далее, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна ⁽⁴⁾, а также в гл. VII монографии М. М. Джрбашяна ⁽⁵⁾ были получены существенно новые интегральные представления типа (1) в угловых областях произвольного раствора. Важное значение имела работа С. Г. Гиндикина ⁽⁶⁾, в которой впервые была поставлена и решена задача получения интегральных представлений типа Винера—Пэли (и построения на их основе воспроизводящих ядер) для классов голоморфных в областях Зигеля $D \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ($n \geq 1, m \geq 0$) функций, квадратично интегрируемых по всей области D . Там же было показано, что полученные формулы для воспроизводящих ядер существенно упрощаются в случае так называемых афинно-однородных областей Зигеля $D \subset \mathbb{C}^{n+m}$ ($n \geq 1, m \geq 0$).

2. Вкратце опишем некоторые основные понятия, разработанные в работе ⁽⁶⁾. Острый (т. е. не содержащий целиком ни одной прямой) открытый выпуклый конус (ОВК) $V \subset \mathbb{R}^n$ называется афинно-однородным, если группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохра-

* За развернутым изложением результатов настоящей заметки отсылаем к работе ⁽¹⁾.

няющих конус V , действует транзитивно в V . С каждым таким конусом V специальным образом ассоциируются натуральное число $l \leq n$ (ранг конуса V) и l -компонентные векторы $N = N(V)$, $M = M(V)$. Далее, оказывается, что

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n : \chi_m(y) > 0 \quad (1 \leq m \leq l)\}, \quad (2)$$

где χ_m ($1 \leq m \leq l$) суть дробно-рациональные функции, канонически ассоциированные с V . Для произвольного $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbb{C}^l$ полагается

$$y^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^l |\chi_m(y)|^{\rho_m}, \quad y \in V. \quad (3)$$

Конус V естественным образом порождает скалярное произведение $[\cdot, \cdot]$ в $\mathbb{R}^n$ и меру $dv(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, кратную мере Лебега dx . При этом полагается

$$V^* = \{v \in \mathbb{R}^n : [v, y] \geq 0, \quad \forall y \in V\}. \quad (4)$$

Оказывается, $\text{Int } V^*$ также является афинно-однородным острым ОВК того же ранга l . Если через χ_m^* ($1 \leq m \leq l$) обозначить функции, задающие $\text{Int } V^*$ (в смысле (2)), то для произвольного $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbb{C}^l$ естественно положить

$$(t)^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^l |\chi_m^*(t)|^{\rho_m}, \quad t \in \text{Int } V^*. \quad (5)$$

Наконец, для $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbb{C}^l$ полагаем $\rho^* = (\rho_1^*, \dots, \rho_l^*) \in \mathbb{C}^l$.

3. Всюду дальше V обозначает афинно-однородный острый ОВК ранга l в $\mathbb{R}^n$, $N = N(V) = (N_1, \dots, N_l)$, $M = M(V) = (M_1, \dots, M_l)$. Кроме того, а priori будем предполагать, что заданы некоторые непрерывные положительные функции $\varphi_m(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, $1 \leq m \leq l$.

При этом полагаем $\tilde{\varphi}_m(\tau) = \varphi_m(\tau) \cdot \tau^{N_m/2}$, $\tau \in (0, +\infty)$, $1 \leq m \leq l$. Кроме того,

$$\gamma(y) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^l \varphi_m(\chi_m(y)), \quad y \in V, \quad (6)$$

$$\gamma_V^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V e^{-[t, y]} \cdot \gamma(y) dv(y), \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Затем при $0 < \rho, s < +\infty$ через $H_{s, \rho}^p(T_V)$ обозначается пространство тех голоморфных в трубчатой области $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, для которых

$$M_{s, \gamma}^{\rho, \gamma}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^\rho dv(x) \right\}^s \cdot \gamma(y) dv(y) < +\infty. \quad (8)$$

Далее, сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать некоторая непрерывная положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$:

$$(I) \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} = 0; \quad (II) \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \leq 0; \quad (III) \underline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \geq 0;$$

(IV) $\varphi(\tau) \in L^1(0, R)$, $\forall R > 0$; (V) $\varphi(2\tau) \leq \text{const} \cdot \varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$.
Кроме того, полагается

$$\varphi^*(t) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t\tau} \cdot \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (9)$$

Наконец, преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, определяется как

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot e^{-i(t, x)} dv(x), \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

4. Справедливы следующие предложения;

Предложение 1.1°. *Имеет место тождество:*

$$\gamma_V^*(t) \equiv \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot (t)_+^{-M+2} \prod_{m=1}^l \bar{\varphi}_m^*(\chi_{l-m+1}^*(t)), \quad t \in \text{Int } V^*. \quad (11)$$

2°. Если функции $\bar{\varphi}_m$ ($1 \leq m \leq l$) обладают свойством (III), то

$$\gamma_V^*(t) \equiv +\infty, \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*. \quad (12)$$

3°. Если функции $\bar{\varphi}_m$ ($1 \leq m \leq l$) обладают свойствами (II) и (IV), то функция $\gamma_V^*(t)$ непрерывна в конусе $\text{Int } V^*$ и при этом $0 < \gamma_V^*(t) < +\infty$, $t \in \text{Int } V^*$.

Предложение 2. Если функции $\bar{\varphi}_m$ ($1 \leq m \leq l$) обладают свойствами (II) и (IV), $\lambda \in V$ и $\delta \in (0, +\infty)$, $\alpha \in [0, +\infty)$, то функция

$$\tau_l(t) \equiv \frac{e^{-[\lambda, t]}}{[\gamma_V^*(\delta \cdot t)]^\alpha}, \quad t \in \text{Int } V^*, \quad (13)$$

принадлежит всем пространствам $L^p(\text{Int } V^*)$, $0 < p < +\infty$.

Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. Пусть функции $\bar{\varphi}_m$ ($1 \leq m \leq l$) обладают свойством (III) и $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$. Тогда каждая функция $f \in H_{s, \tau}^p(T_V)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i[z, t]} dv(t), \quad z \in T_V, \quad (14)$$

где:

1°. При $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна, обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \setminus V^*$, и такова, что

$$\sup_{t \in V^*} \{ |F(t)|^p \cdot \gamma_V^*(s \cdot t) \} \leq \frac{M_{s,1}^1(f)}{(2\pi)^{n/2s}} < +\infty. \quad (15)$$

2°. При $1 < p \leq 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$, измерима и удовлетворяет условию

$$\int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q|t \cdot y|} d\nu(t) \right\}^{\frac{p-1}{p}} \cdot \gamma(y) d\nu(y) \leq \frac{M_{s,1}^p(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s(2-p)}} < +\infty \quad (17)$$

($q = p/(p-1)$).

При этом для п. в. $y \in V$ имеем

$$\hat{f}_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-t \cdot y}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \quad (17)$$

где $f_y(x) \equiv f(x + ty)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, при $p = 2$ интегральное представление (14) класса $H_{s,1}^p(T_V)$ является к тому же параметрическим и в (16) имеет место равенство (т. е. выполняется равенство Персеваля).

Теорема 2. Пусть функции φ_m ($1 \leq m \leq l$) обладают свойствами (I) и (IV) и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле

$$\Phi(z, w) = \int_{\text{int } V^*} \frac{e^{i(z - \bar{w}, t)}}{\gamma_V^*(2 \cdot t)} d\nu(t), \quad z, w \in T_V. \quad (18)$$

Допустим также, что $1 \leq p \leq 2$ и число s удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) $1/p \leq s \leq 2/p$;

(б) $1/p \leq s \leq 1/(p-1)$, но функции φ_m ($1 \leq m \leq l$) обладают также свойством (V).

Тогда каждая функция $f \in H_{s,1}^p(T_V)$ допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v) d\nu(u) d\nu(v), \quad z \in T_V, \quad (19)$$

($w = u + iv$).

Замечание 1. Можно показать, что из (18) вытекает (по крайней мере, формально) следующая формула:

$$\Phi(z, w) = \text{const} \cdot \left(\frac{z - \bar{w}}{2l} \right)^{-\frac{N}{2}} \cdot \prod_{m=1}^l \Psi_m \left(\chi_{l-m+1} \left(\frac{z - \bar{w}}{2l} \right) \right), \quad (18')$$

$z, w \in T_V$.

где

$$\Psi_m(z) = z^{M/(m+1)} \cdot [\varphi_{l-m+1}^*(z)]^{-1}, \quad z \in (0, +\infty). \quad (20)$$

Поскольку в силу условий теоремы 2 функции Ψ_m ($1 \leq m \leq l$) допускают аналитическое продолжение с полуоси $(0, +\infty)$ в полуплоскость $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$, то, например, в предположении $\operatorname{Re} \chi_m(z) > 0$, $\operatorname{Re} z \in V$ ($1 \leq m \leq l$), формула (18') действительно верна. Однако автору не ясно, насколько правомерно такое предположение. Из работы (*) нам известно лишь, что $\chi_m(z) \neq 0$, $\operatorname{Re} z \in V$ ($1 \leq m \leq l$).

Замечание 2. При $n \geq 1$, $p=2$, $s=1$ и $\varphi_m(z) \equiv 1$, $z \in (0, +\infty)$ ($1 \leq m \leq l$), теоремы 1 и 2 вытекают из более общих результатов § 5 работы (*) С. Г. Гиндикина.

Замечание 3. В работе М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна (*) теорема 2 установлена при $n=l=1$, $s=1$ и $\varphi_1(z) \equiv z$, $z \in (0, +\infty)$ ($z > -1$), но уже при всех $p \in [1, +\infty)$, а не только при $1 \leq p \leq 2$.

Замечание 4. В случае, когда φ_m ($1 \leq m \leq l$) суть согласованные друг с другом степенные функции, а конус $V \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) к тому же самосопряженный, теорема 2 вытекает из одного результата, сформулированного в работе (*) Койфмана и Рохберга.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к настоящей работе и профессору С. Г. Гиндикину за ценные советы и полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Институт математики Академии наук Армении

Ա. Հ. ՎԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ինտեգրալ ներկայացումներ իրենց նիմֆում զծորեն-համասեռ կոներ ունեցող խողովակածև տիրույթներում

Հոգվածում դիտարկվում են $\mathbb{R}^n$ տարածությունում գտնվող $l \geq 1$ կարգի զծորեն-համասեռ տիրույթներ: Ինչպես հայտնի է, այդպիսի V կոները ունեն

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n: \chi_m(y) > 0 \quad (1 \leq m \leq l)\}$$

տեսք, որտեղ χ_m ($1 \leq m \leq l$) կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիաները կանոնավոր կերպով հասկանված են V -ի հետ: Ալեխատանքում ասումնասիրվում են

$$T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n: x \in \mathbb{R}^n, y \in V\} \text{ խողովակածև տիրույթում}$$

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right\}^s \cdot \prod_{m=1}^l \varphi_m(\chi_m(y)) dy < +\infty$$

պայմանին բավարարող $f(z) = f(x + iy)$ հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասերը: Այստեղ $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$ և $\varphi_s(z)$ -ները, $z \in (0, +\infty)$ ($1 \leq m \leq l$) կամայական դրական անընդհատ ֆունկցիաներ են: Դեկլով որոշակի պայ-

մաներ φ_m ($1 \leq m \leq l$) ֆունկցիաների և S պարամետրի վրա, նշված դասերի համար հաստատվում են Պելի-Վիեների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ՝ ինչպես նաև կառուցվում են $\Phi(z, \tau)$, $z, \tau \in T_\nu$, վերարտադրող կորիզներ, որոնք հոլոմորֆ են ըստ z -ի և անտիհոլոմորֆ՝ ըստ τ -ի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. О. Каранетян, Рукопись деп. в АрмНИИНТИ 16.11.90, № 48Ар 90, Ереван, 42 с., 1990. ² R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., N. Y., 1934. ³ S. Hochner, Math. Ann., v. 45, № 4, p. 686—707 (1944). ⁴ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). ⁵ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ⁶ С. Г. Гиндикян, УМН, т. 19, № 4, с. 3—92 (1964). ⁷ М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, ДАН СССР, т. 285, № 3, с. 547—557 (1985). ⁸ R. Coifman, R. Rochberg, Astérisque, n. 77, p. 11—66 (1980).