

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Интегральные представления голоморфных функций в радиальных
 трубчатых областях*

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Известная теорема Н. Винера и Р. Пэли ⁽²⁾ утверждает, что класс H^2 в правой полуплоскости $|z: \operatorname{Re} z > 0|$ допускает параметрическое интегральное представление

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) \cdot e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1)$$

с произвольной функцией $F(t) \in L^2(0, +\infty)$.

Этот классический результат в свое время инициировал многочисленные исследования, продолжающиеся и по настоящее время. С. Бохнер ⁽³⁾ установил аналог теоремы Винера—Пэли для голоморфных функций многих комплексных переменных. В работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна ⁽⁴⁾, а также в гл. VII монографии М. М. Джрбашяна ⁽⁵⁾ для весовых классов Харди в угловых областях были установлены существенно новые (и более общие, чем (1)) интегральные представления посредством ядер типа Миттаг-Леффлера

$$E_r(z, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(r + k/\rho).$$

Принципиальное значение имела работа С. Г. Гиндикина ⁽⁶⁾, где в качестве многомерного аналога полуплоскости рассматривались области Зигеля. В этой работе впервые была поставлена и решена следующая общая задача: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли (и на их основе построить воспроизводящие ядра) для классов голоморфных в областях Зигеля функций, квадратично интегрируемых по всей области определения. За дальнейшими результатами в этом направлении отсылаем к работам ⁽⁷⁻⁹⁾.

* За развернутым наложением результатов настоящей заметки отсылаем к работе ⁽¹⁾.

2. Всюду дальше пространство R^n отождествляется с вполне вещественным подпространством в C^n . Для произвольного $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in C^n$ и $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in C^{n-1}$, так что $z = (z', z_n)$. Для произвольных $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in C^n$ полагаем

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \bar{w}_k. \quad (2)$$

Далее, сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать произвольная непрерывная положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$:

$$(I) \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} = 0; \quad (II) \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \leq 0; \quad (III) \underline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} > 0;$$

$$(IV) \varphi(\tau) \in L^1(0, R), \quad \forall R > 0; \quad (V) \varphi(2\tau) \leq \text{const} \cdot \varphi(\tau), \quad \tau \in (0, +\infty).$$

Кроме того, положим

$$\varphi^*(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (3)$$

Если V — некоторый открытый выпуклый конус (сокращенно ОВК) в R^n и $\gamma(y) > 0$, $y \in V$ — произвольная непрерывная функция, то полагаем

$$\gamma_V^*(t) = \int_V e^{-\langle t, y \rangle} \gamma(y) dy, \quad t \in R^n. \quad (4)$$

При этом для $p, s \in (0, +\infty)$ обозначим через $H_{s, \gamma}^p(T_V)$ пространство голоморфных в трубчатой области $T_V = \{z = x + iy \in C^n: x \in R^n, y \in V\}$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, для которых

$$M_{s, \gamma}^p(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x + iy)|^p dx \right\}^s \gamma(y) dy < +\infty. \quad (5)$$

Далее, если V — ОВК в R^n , то функцию $\rho(y)$, $y \in V$, (вообще говоря, комплекснозначную) назовем однородной, если: $\rho(\alpha y) = \alpha \cdot \rho(y)$, $y \in V$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Напомним также, что сопряженным конусом, согласно общепринятому определению, называется множество

$$V^* = \{v \in R^n: \langle v, y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in V\}. \quad (6)$$

Внутренность сопряженного конуса обозначается через $\text{Int } V^*$.

Наконец, преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$,

$x \in R^n$, договоримся обозначать через $\hat{g}$.

3. Справедлива следующая теорема типа Винера—Пэли:

Теорема 1. Пусть V — острый (т. е. $\text{Int } V^* \neq \emptyset$) ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(y)$, $y \in V$ — однородная непрерывная положительная функция, $\tau(z)$, $z \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойством (III), и $\gamma = \varphi \circ \tau$. Тогда каждая функция f из класса $H_{\gamma, \tau}^p(T_V)$ ($1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$) допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i(z, t)} dt, \quad z \in T_V^*, \quad (7)$$

где:

1°. При $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна, обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \setminus V^*$ и такова, что

$$\sup_{t \in V^*} \{ |F(t)|^2 \cdot \gamma_V^*(s \cdot t) \} < \frac{M_{s, 1}^1(f)}{(2\pi)^{n/2-s}} < +\infty. \quad (8)$$

2°. При $1 < p < 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$, измерима и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \int_{V^*} \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q(y, t)} dt \right\}^{s(p-1)/q} \cdot \tau(y) dy \leq \\ & \leq \frac{M_{s, 1}^p(f)}{(2\pi)^{n/2-s-(2-p)}} < +\infty \quad (q = 1/(p-1)). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом для п. в. $y \in V$:

$$f_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-i(y, t)}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \quad (10)$$

где $f_y(x) \equiv f(x + iy)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, при $p = 2$ интегральное представление (7) класса $H_{\gamma, \tau}^p(T_V)$ является параметрическим и в (9) имеем равенство (т. е. выполняется равенство Парсеваля).

4. Назовем ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) специальным, если

- 1) $V \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$;
- 2) $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in V$.

С каждым специальным ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ ассоциируются следующие непрерывные функции:

$$\sigma_V(y') \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : (y', \sigma) \in V \}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (11)$$

$$\tau_V(y) \stackrel{\text{def}}{=} y_n - \tau_V(y'), \quad y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Интерес к функции τ_V обусловлен тем, что $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \tau_V(y) > 0\}$ и, кроме того, $\tau_V(y) \asymp \text{dist}(y, \partial V)$, $y \in V$. Если V — специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$, то положим

$$\Pi_V = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : (y', 1) \in V\}. \quad (13)$$

Определение. Специальный ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ назовем нормальным, если: $\sigma_V(y') > 0$, $\forall y' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \iff$ область Π_V ограничена.

Всюду дальше V будет обозначать нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$. При этом целесообразно введение интеграла

$$I_V(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x) - \langle x, a \rangle} dx, \quad a \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (14)$$

а также рассмотрение множества $A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : I_V(a) < +\infty\}$.

Теорема 2. Пусть $U = \text{Int } V^*$, тогда:

1°. U есть нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$.

2°. $\Pi_U = \text{Int } A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \min_{|\zeta|=1} [\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle] > 0\}$.

3°. Интеграл $I_V(a)$ определяет в области Π_U непрерывную положительную функцию.

4°. При произвольном $t \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедлива формула:

$$\sigma_U(t) = \max_{|\zeta|=1} \left\{ -\frac{\langle \zeta, t \rangle}{\sigma_V(\zeta)} \right\} = -\min_{|\zeta|=1} \left\{ \frac{\langle \zeta, t \rangle}{\sigma_V(\zeta)} \right\}. \quad (15)$$

5. Справедлив следующий основной результат:

Теорема 3. Пусть V — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}_+$, $U = \text{Int } V^*$, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (I) и (IV), $\gamma = \varphi \circ \sigma_V$ и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле

$$\Phi(z, w) = 2^{n-1} \int_{\Pi_U} \frac{da}{I_V(a)} \int_0^{+\infty} \frac{r^{2n-2}}{\varphi^*(2r)} \cdot e^{ir \langle z - \bar{w}, (a, 1) \rangle} dr, \quad z, w \in T_V. \quad (16)$$

Допустим также, что $1 < p \leq 2$ и число s удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) $1/p \leq s \leq 2/p$;

(б) $1/p \leq s \leq 1/(p-1)$, но при этом φ обладает также свойством (V). Тогда каждая функция $f \in H_{s,1}^p(T_V)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v) du dv, \quad z \in T_V (w = u + iv). \quad (17)$$

Замечание 1. В важном частном случае $\varphi(\tau) = \tau^\alpha$, $\tau \in (0, +\infty)$ ($\alpha > -1$), формула (16) для ядра $\Phi(z, w)$ заметно упрощается и принимает вид

$$\Phi(z, w) = 2^{n+1} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{da}{I_V(a)} \cdot \frac{1}{[i(\bar{w}-z), (a, 1)]^{2n+1}}, \quad (18)$$

$$z, w \in T_V.$$

Замечание 2. Если $\varphi(\cdot) = \tau^\alpha$, $\alpha \in (0, +\infty)$ ($\alpha > -1$) и при этом $n = 1$, то с учетом (18) интегральное представление (17) принимает вид

$$f(z) = \frac{2^\alpha (\alpha + 1)}{\pi} \int_{\text{Im } w > 0} f(w) \frac{v^\alpha}{[i(\bar{w}-z)]^{2+\alpha}} du dv, \quad (19)$$

$$\text{Im } z > 0 \quad (w = u + iv).$$

В работе М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна ⁽¹⁰⁾ принципиально иным методом (не опирающимся на технику преобразования Фурье — Планшереля) интегральное представление (19) было установлено для голоморфных в полуплоскости $\Pi_+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0\}$ функций из весовых пространств $L^p[\Pi_+; v^\alpha du dv]$, $\alpha > -1$, причем при $1 \leq p < +\infty$, а не только для $1 \leq p \leq 2$.

Замечание 3. При $n \geq 1$, $p = 2$, $\alpha = 1$ и $\varphi(\cdot) \equiv 1$, $\alpha \in (0, +\infty)$, теоремы 1 и 3 вытекают из более общих результатов § 5 работы ⁽⁶⁾ С. Г. Гиндикина.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к данной работе.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ինտերսոլ խողովակաձև տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ

Ներկայացված հոդվածում նախ և առաջ ուսումնասիրվում են $\mathbb{R}^n$ տարածությունում ընկած այսպես կոչված նորմալ հատուկ կոնները, որոնք, ըստ էության, տարրերվում են սովորական սուր կոներից միայն իրենց հատուկ դասավորվածությամբ $\mathbb{R}^n$ -ում: Այդ տեսակի V կոների հետ որոշակիորեն կապնվում է այնպիսի մի անընհատ $\tau_V(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, ֆունկցիա, որ $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \tau_V(y) > 0\}$ և, քաջի ալդ, $\tau_V(y) = \text{dist}(y, \partial V)$, $y \in V$: Աշխատանքում դիտարկվում են $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ խողովակաձև տիրույթում

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right\}^\alpha \tau_V(y) dy < +\infty$$

պայմանին բավարարող $f(z) \equiv f(x + iy)$ հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասերը: Այստեղ $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$ և $\varphi(\tau)$ -ն, $\tau \in (0, +\infty)$, կամայական դրական անընդհատ ֆունկցիա է: Դնելով որոշակի պայմաններ ֆունկցիայի և S պարամետրի վրա, նշված դասերի համար հաստատվում են Պելի—Վիեների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ, ինչպես նաև կառուցվում են $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$, վերաբառագրող կորիզների որոնք հոլոմորֆ են ըստ z -ի և անտիհոլոմորֆ՝ ըստ w -ի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. О. Карапетян, Рукоп. деп. в АрмНИИИТИ 26. 11. 90, № 49—Ар 90, Ереван, 40с. 1990. ² R. Paley, N. Wiener, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., N. Y., 1934. ³ S. Bochner, Ann. Math., v. 45, № 4, с. 686—707 (1944). ⁴ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). ⁵ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. МГУ, М., 1966. ⁶ С. Г. Гиндикин, УМН, т. 19, № 4, с. 3—92 (1964). ⁷ М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 283, № 5, с. 1054—1057 (1985). ⁸ А. О. Карапетян, Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, Канд. дисс., Ереван, 1987. ⁹ А. О. Карапетян, Изв. АН Армении, Матем., т. 25, № 4, с. 315—333 (1990). ¹⁰ М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, ДАН СССР, т. 285, № 3, с. 547—550 (1985).