ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.01

Л. А. Агаловян, А. Б. Товмасян

О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 18/XII 1990)

Краевые задачи теории упругости для полосы являются сингулярно возмущенными. В работе [1] найдена асимптотика напряжений и перемещений в случае первой краевой задачи (на продольных кромках заданы напряжения) и предложен эффективный асимптотический метод определения всех искомых величин, установлена связь с теорией балок Бернулли—Кулона—Эйлера, а также с принципом Сен-Венана. Асимптотический метод оказался эффективным также при решении второй и третьей краевых задач как для однослойной, так и для многослойных полос [2, 3]. При этом была доказана неприменимость гипотезы плоских сечений для решения этого класса задач. Установленная для искомых величин асимптотика оказалась принципиально отличной от асимптотики тех же величин в первой краевой задаче. Тем же методом решены соответствующие пространственные краевые задачи для анизотропных пластин и оболочек [4, 5].

В данной работе получено асимптотическое решение смешанных термоупругих задач для анизотропной полосы, возникающих, в частности, при рассмотрении взаимодействия фундамента сооружения с основанием. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, моделирующее, например, трение, а на другой—условия первой или смешанных краевых задач. На полосу действуют объемные силы, в качестве которых могут выступать вес фундамента и приведенные сейсмические силы. Считается, что полоса может быть подвергнута температурным воздействиям, изменение температурного поля по ширине полосы является произвольной, но известной функцией.

1. Требуется найти решение плоской задачи термоупругости в области $\Omega = \{(x, y): x \in [0, a], |y| \leqslant h, h \ll a\}$.

На лицевых кромках $y = \pm h$ заданы условия

$$v(-h) = \varepsilon^{-1} v^{-}(x), \quad \sigma_{xy}(-h) = \sigma_{xy}^{-}(x), \quad (\varepsilon = h/a) \tag{1.1}$$

$$\sigma_y(h) = \varepsilon^{-1} \sigma_y^{+}(x), \quad \sigma_{xy}(h) = \sigma_{xy}^{+}(x). \tag{1.2}$$

На полосу действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ и температурные воздействия, изменение температурного поля $\theta(x, y) = T - T_0$ считается известной функцией. На торцах $x = 0, a$ будем считать, что заданы статические, кинематические или смешанные краевые условия теории упругости. Чтобы решить поставленную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$ и в качестве искомых величин выберем напряжения и безразмерные перемещения $U = u/a$, $V = v/a$. В результате получаем следующую сингулярно возмущенную малым параметром ε систему:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} + aF_x = 0;$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + aF_y = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \sigma_{xy} + \alpha_{11} \theta; \tag{1.3}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \sigma_{xy} + \alpha_{22} \theta;$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \sigma_{xy} + \alpha_{12} \theta,$$

где a_{ik} — упругие коэффициенты податливости, α_{ik} — коэффициенты теплового расширения.

Решение системы (1.3) складывается из решения внутренней задачи (проникающее решение) и пограничного слоя ([6]). Проникающее напряженно-деформированное состояние отыщем в виде

$$Q = \varepsilon^{q_i + s} Q^{(s)}, \quad s = \overline{0, S}, \tag{1.4}$$

где Q — любое из напряжений и перемещений, q_i — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Эта цель достигается лишь при

$$q = -1 \text{ для } (\sigma_x, \sigma_y, U, V), \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{xy}. \tag{1.5}$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x = \varepsilon^{-1+s} a^{-1} F_x^{(s)}(\xi, \zeta), \qquad F_y = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_y^{(s)},$$
$$\theta = \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}. \tag{1.6}$$

Укажем, что найденная асимптотика (1.5) принципиально отличается от асимптотик напряжений и смещений по классической теории балок и второй краевой задачи, установленных в ([1,2]).

Подставив (1.4) в (1.3), с учетом (1.5), (1.6) получим систему относительно $Q^{(s)}$, решив которую, получим:

$$V^{(s)} = v^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi, \zeta), \qquad U^{(s)} = u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi, \zeta);$$

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta); \qquad \sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{y0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta); \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{y0}^{(s)} \zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta),$$

где:

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta} (a_{22}\sigma_y^{(s-1)} + a_{12}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-2)} + a_{22}\theta^{(s-1)})\, d\zeta;$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} + a_{22}\theta^{(s-1)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right) d\zeta;$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(F_y^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi}\right) d\zeta, \qquad \sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(F_x^{(s)} + \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi}\right) d\zeta; \quad (1.8)$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}} \left(\frac{du^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{12}\sigma_y^{*(s)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)} - a_{11}\theta^{(s)}\right).$$

В (1.7) неизвестными являются функции $\sigma_{xy0}^{(s)}$, $\sigma_{y0}^{(s)}$, $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, которые определяются из условий (1.1), (1.2) или из аналогичных смешанных условий. Условиям (1.1), (1.2) соответствуют

$$v^{(s)}(\xi) = v^{-(s)}/a - v^{*(s)}(\xi, -1); \qquad \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1);$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \frac{1}{2}\left[\sigma_{xy}^{-(s)} + \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)\right];$$

$$\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} = R^{(s)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a_{11}} u^{(s)} = \int_0^{\xi}\int_0^{\xi} R^{(s)}\, d\xi\, d\xi + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)};$$

$$R^{(s)} = \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^{-(s)} - \sigma_{xy}^{+(s)}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)) + \quad (1.9)$$

$$+ \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d}{d\xi}(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1));$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \qquad \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^{+}, \qquad v^{-(0)} = v^{-};$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = v^{-(s)} = 0; \qquad s \neq 0.$$

Таким образом, формулами (1.4)—(1.9) полностью определяются величины внутреннего напряженного состояния. При полиномиальном нагружении это решение становится точным решением для бесконечной полосы.

Решение (1.4)—(1.9) содержит две произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий при $x=0$, a. Если ограничиться только решением внутренней задачи, эти условия могут быть удовлетворены лишь интегрально. Для поточечного их удовлетворения необходимо построить также решение типа пограничного слоя. Погранслой строится как в ([7]).

2. В качестве иллюстрации полученных результатов приведем решение внутренней задачи весомой ортотропной полосы, которое соответствует условиям

$$\sigma_y(h) = -p^+ = \text{const}, \qquad \sigma_{xy}(h) = \tau^+ = \text{const},$$
$$\sigma_{xy}(-h) = \tau^- = \text{const}, \qquad v(-h) = 0. \tag{2.1}$$

Имеем $F_x = 0$, $F_y = -\rho g$. Итерация обрывается на втором приближении. В результате имеем решение:

$$\sigma_x = (\tau^- - \tau^+)\frac{x}{2h} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\left[p^+ + \rho g h\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right] + C_1;$$

$$\sigma_y = \rho g(y - h) - p^+; \qquad \sigma_{xy} = \frac{1}{2}(\tau^- + \tau^+) - (\tau^- - \tau^+)\frac{y}{2h};$$

$$u = a_{11}(\tau^- - \tau^+)\frac{x^2}{4h} + \frac{1}{2}a_{66}\left[(\tau^- + \tau^+)y - (\tau^- - \tau^+)\frac{y^2}{2h}\right] + \tag{2.2}$$
$$+ a_{11}(C_1 x + aC_2);$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}(y + h)\left[\frac{1}{2}\rho g(y - h) - (p^+ + \rho g h)\right] +$$
$$+ a_{12}(y + h)\left[C_1 + (\tau^- - \tau^+)\frac{x}{2h}\right].$$

В (2.2) постоянная интегрирования C_2 характеризует жесткое смещение, которое можно исключить, закрепив, например, центр тяжести сечения $x = 0$ ($U(x = 0,\ y = 0) = 0$, тогда $C_2 = 0$). Для определения же C_1 должно быть задано при $x = 0$ значение усилия, что обосновывается свойством погранслоя, или перемещение. Если

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x\,dy = T^0 \quad \text{при } x = 0, \tag{2.3}$$

то

$$C_1 = \frac{T^0}{2h} - \frac{a_{12}}{a_{11}}(p^+ + \rho g h). \tag{2.4}$$

Из формул (1.4)—(1.9) можно получить замкнутые решения и для других случаев полиномиального нагружения полосы.

Институт механики
Академии наук Армении

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Բ. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ ջերմաառաձգական շերտի խառը եզրային խնդրի մասին

Առաձգականության տեսության եզրային խնդիրները շերտի համար հանդիսանում են սինգուլյար գրգռված։ Առաջին և երկրորդ եզրային խնդիրների համար (1,2) աշխատանքներում առաջարկված է լուծման արդյունավետ ասիմպտոտիկ եղանակ և կապ է հաստատված ինչպես հեծանների դասական տեսության, այնպես էլ Սեն-Վենանի սկզբունքի հետ։ Ներկա աշխատանքում որոշված է խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը։ Խնդիրը, մասնավորապես, մոդելավորում է առաձգական հիմքի փոխազդեցությունը հիմնատակի հետ, երբ հաշվի է առնվում շփումը։

Ցույց է տրված, որ լարումների և տեղափոխումների ասիմպտոտիկ վարքը սկզբունքորեն տարբերվում է համապատասխան մեծությունների վարքից՝ ըստ հեծանների դասական տեսության։

Արտածված է հավասարում տանգենցիալ տեղափոխման նկատմամբ, որի լուծումով արտահայտվում են մյուս մեծությունները։

Ցույց է տրված, որ լայն դասի դեպքերի համար կարելի է ստանալ փակ լուծումներ, մի դեպքի համար բերվում է այդ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Л. А. Агаловян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). 2 *Л. А. Агаловян*, Межвуз. сб. «Механика», изд. ЕГУ, вып. 2, 1982. 3 *Л. А. Агаловян*, Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, Таллин, 1983. 4 *Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян*, ПММ, т. 50, вып. 2 (1986). 5 *Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 42, № 3 (1989). 6 *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, Наука, М., 1973. 7 *Л. А. Агаловян*, Межвуз. сб. «Механика», изд. ЕГУ, вып. 3, 1984.