УДК 517.5

Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян, К. Р. Таталян

Обобщение теоремы Каратеодори

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 20/XII 1990)

1. *Теорема о представлении.* Пусть X — локально-выпуклое пространство, M — выпуклое компактное подмножество X . Тогда M имеет хотя бы одну крайнюю точку ((¹), с. 85).

Понятие крайней точки может быть обобщено.

Определение 1. Точка $x \in M$ называется k -крайней точкой множества M , $k \geq 1$, если не существуют аффинно-независимые точки $x_1, \dots, x_{k+1}$ из M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ такие, что

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = 1, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \quad (1)$$

Иными словами, x — k -крайняя точка M , если не существует принадлежащего M k -мерного симплекса, для которого x — внутренняя точка.

Если $E_k M$ — множество k -крайних точек, то по определению $E_1 M$ — множество крайних точек M .

Цель настоящей заметки — доказать теорему о представлении k -крайних точек.

Пусть $s > 1$ и $n_1 \geq 1, \dots, n_s \geq 1$ такие целые числа, что $n_1 + \dots + n_s = k$.

Теорема 1. Пусть M — выпуклое компактное множество локально-выпуклого пространства. Для любой точки $x \in E_k M$, $k > 1$, найдутся попарно-различные точки $x_1 \in E_{n_1} M, \dots, x_s \in E_{n_s} M$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$ и

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s.$$

Сформулируем следствие этой теоремы. Именно, любая точка $x \in E_k M$, $k > 1$, представима в виде выпуклой комбинации не более чем k крайних точек M .

Следствие даже в $\mathbb{R}^n$ уточняет теорему Каратеодори ((²), с. 169).
 Теорема Каратеодора. Пусть S — замкнутое ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Любая точка $x \in S$ ($x \in \partial S$) пред-

ставима в виде выпуклой линейной комбинации не более чем $n+1$ (не более чем n) крайних точек S .

Для сравнения последнего факта и его уточнения полезна

Лемма 1. Пусть S — замкнутое ограниченное выпуклое множество в R^n . Тогда:

$$1. \partial S = E_n S.$$

$$2. \text{Int } S = E_{n+1} S \setminus E_n S.$$

Доказательство. Пусть $x \in \partial S$. Если $x \notin E_n S$, то существует n -мерный симплекс, целиком лежащий в S и содержащий x как внутреннюю точку, т. е. $x \in \text{Int } S$. Итак, $\partial S \subset E_n S$.

Пусть $x \in E_n S$. Покажем $x \in \partial S$. Допустим $x \in \text{Int } S$, т. е. существует n -мерный шар с центром в точке x , целиком лежащий в S . Без ограничения общности положим $x = O = (0, 0, \dots, 0)$. Точки шара

$$x_1 = (0, 0, \dots, r), \dots, x_n = (r, 0, \dots, 0), \quad x_{n+1} = \left(-\frac{r}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{r}{\sqrt{n}} \right)$$

радиуса r аффинно-независимы.

Действительно, аффинное представление точки O ($a_1 + \dots + a_{n+1} = 0$)

$$O = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}, \quad (2)$$

записанное в координатной форме

$$\left(\left(a_n - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r, \left(a_{n-1} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r, \dots, \left(a_1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r \right) = O, \quad (3)$$

приводит к равенствам $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$.

Выпуклое линейное представление (2) точки O , согласно (3), дает

$$a_1 = \dots + a_{n+1} = 1, \quad a_1 = \dots = a_n = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}},$$

откуда

$$a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}.$$

Для точки O найдено представление (2) с положительными коэффициентами, где $x_1, \dots, x_{n+1}$ из S аффинно-независимы, т. е. $x \notin E_n S$. Итак, $E_n S \subset \partial S$.

2. Поскольку в R^n любые $n+2$ точки аффинно-зависимы, то $S = E_{n+1} S$. Тогда пункт 1 леммы 1 влечет пункт 2 леммы 1.

Преимущество теоремы 1 перед теоремой Каратеодори иллюстрируется примером.

Пример. Пусть S — n -мерный шар в R^n . По определению k -крайней точки

$$E_1 S = \dots = E_n S = \partial S, \quad E_{n+1} S = S.$$

Непосредственно видно, что $x \in \partial S$, будучи крайней точкой, сама себя представляет, а $x \in \text{Int } S$ представляется выпуклой линейной

комбинацией двух крайних точек. Это заключение вытекает из теоремы 1, но не из теоремы Каратеодори.

2. *Свойства k -крайних точек.* Начнем с замечания. $x \in E_k M$, $k \geq 1$, означает существование аффинно-независимых точек $x_1, \dots, x_{k+1}$ из ∂M и положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ таких, что выполнено (1).

Действительно, пусть выполнено (1) с точками $x_1, \dots, x_{k+1}$ из M . Если, например, $x_1 \in \partial M$, то из-за $x \neq x_1$ через точки x и x_1 проходит единственная прямая. Пусть y_1 точка пересечения этой прямой с ∂M такая, что x_1 — внутренняя точка отрезка с концами x и y_1 . Тогда найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $x_1 = \alpha x + (1 - \alpha)y_1$. Подставив значение x_1 в (1), получим представление $x = (1 - \alpha\lambda_1)^{-1} (\lambda_1(1 - \alpha) \times \lambda y_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1})$ с положительными коэффициентами, сумма которых равна единице, а точки $y_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ аффинно-независимы, $y_1 \in \partial M$.

Приведем три свойства k -крайних точек.

Свойство 1. $E_1 M \subseteq E_2 M \subseteq \dots$ (4)

Действительно, пусть (4) не имеет места. Найдутся $k \geq 1$ и $x \in E_k M$ такие, что $x \notin E_{k+1} M$. Тогда существуют аффинно-независимые точки $y_1, \dots, y_{k+2}$ из M и положительные числа $\mu_1, \dots, \mu_{k+2}$ такие, что $\mu_1 + \dots + \mu_{k+2} = 1$ и $x = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_{k+2} y_{k+2}$. Полагая $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k, \lambda_{k+1} = 1 - \mu_1 - \dots - \mu_k, x_{k+1} = \lambda_{k+1}^{-1} \mu_{k+1} y_{k+1} + \lambda_{k+1}^{-1} \mu_{k+2} y_{k+2}$ приходим к представлению (1). При этом $x_{k+1} \in M$ из-за выпуклости M , а точки $x_1, \dots, x_{k+1}$ аффинно-независимы. Следовательно $x \in E_{k+1} M$.

Свойство 2. Если $M \setminus E_k M \neq \emptyset$ для некоторого $k \geq 1$, то $E_k M \subseteq \partial M$.

Действительно, пусть существует $y \in E_k M$ такое, что $y \in \text{Int} M$. Для точки $x \in M \setminus E_k M$ имеет место (1), где $x_1, \dots, x_{k+1} \in \partial M$, причем x отлично от $y, x_1, \dots, x_{k+1}$. Проведем прямую через точки x и y и выберем ту ее точку пересечения z с ∂M , при которой y — внутренняя точка отрезка с концами x и z . Тогда найдется $\beta \in (0, 1)$ такое, что

$$y = \beta x + (1 - \beta)z, \quad z \in \partial M. \quad (5)$$

Проведем прямые через точки z и $x_1, \dots, x_{k+1}$ и возьмем точки

$$z_l = \beta x_l + (1 - \beta)z, \quad l = \overline{1, k+1}. \quad (6)$$

на этих прямых. Точки $z_1, \dots, z_{k+1}$ аффинно-независимы, поскольку таковы точки $x_1, \dots, x_{k+1}$. Из (1), (5), (6) выводим $y = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_{k+1} z_{k+1}$, откуда следует $y \in E_k M$.

Пусть $x \in E_k M \setminus E_{k-1} M$. Это, в частности, означает, что существуют аффинно-независимые точки $y_1, \dots, y_k$ из M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k$.

В приложении доказывается важное

Свойство 3. Пусть

$$V = V(y_1, \dots, y_k) \stackrel{\text{def}}{=} \{z: z = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k, a_1 + \dots + a_k = 1\}$$

Тогда

$$E_n(M \cap V) \subset E_n M \quad n = \overline{1, k-1}. \quad (7)$$

С помощью свойства 3 устанавливается теорема о представлении которую достаточно доказать при $s = 2$.

Действительно, пусть теорема имеет место при $s = 2$. Тогда для точки $x \in E_k M$ существует представление $x = \mu_1 x_1 + (1 - \mu_1) y_1$, где $\mu_1 \in [0, 1]$, $x_1 \in E_n M$, $y_1 \in E_{k-n} M$; для y_1 — представление $y_1 = \mu_2 x_2 + (1 - \mu_2) y_2$, где $\mu_2 \in [0, 1]$, $x_2 \in E_n M$, $y_2 \in E_{k-n_1-n_2} M$ и т. д.; для y_{s-2} — представление $y_{s-2} = \mu_{s-1} x_{s-1} + (1 - \mu_{s-1}) y_{s-1}$, где $\mu_{s-1} \in E_{n_{s-1}} M$, $y_{s-1} \in E_n M$. Полагая $x_s = y_{s-1}$ и

$$\lambda_i = \mu_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \mu_j), \quad i = \overline{1, s-1}, \quad \lambda_s = \prod_{j=1}^{s-1} (1 - \mu_j),$$

приходим к утверждению теоремы.

Для точки $x \in E_k M$ случай $x \in E_1 M$ тривиален, поскольку в теореме такое x представляется через самого себя (см. свойство 1).

Остальные случаи при $s = 2$ сводятся к утверждению.

Для любой точки $x \in E_k M \setminus E_{k-1} M$, $k > 1$, и любого n , $1 \leq n < k$, найдутся $\lambda \in (0, 1)$, $x_1 \in E_n M$, $x_2 \in E_{k-n} M$ такие, что

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2. \quad (8)$$

Действительно, случай $x \in E_k M$, $k > 1$, для которого существует s , $1 < s < k$, такое, что $x \in E_{s-1} M$, $x \in E_s M$, очевидно, сводится к нашему утверждению.

Приступим к доказательству утверждения.

Так как $x \notin E_{k-1} M$, то существуют аффинно-независимые точки $y_1, \dots, y_k$ из ∂M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ и

$$x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k. \quad (9)$$

Представление (8) для точки x строим следующим образом. Полагая $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, рассмотрим точки

$$x_1 = \lambda^{-1} (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n), \quad x_2 = (1 - \lambda)^{-1} (\lambda_{n+1} y_{n+1} + \dots + \lambda_k y_k),$$

откуда следует (8) с $\lambda \in (0, 1)$. Далее

$$x_1 \in \text{Int}(M \cap V(y_1, \dots, y_n)), \quad x_2 \in \text{Int}(M \cap V(y_{n+1}, \dots, y_k)).$$

Следовательно

$$x_1 \in E_n(M \cap V(y_1, \dots, y_n)), \quad x_2 \in E_{k-n}(M \cap V(y_{n+1}, \dots, y_k))$$

и по свойству 3 имеем $x_1 \in E_n M$, $x_2 \in E_{k-n} M$.

Приложение. Доказательству свойства 3 предположим две леммы.

Лемма 2. Пусть для $x \in E_k M$ имеет место (9). Тогда любой n -мерный симплекс, $1 \leq n < k$, с вершинами M , содержащий x как внутреннюю точку, целиком лежит в $V(y_1, \dots, y_n)$.

Доказательство. Для точки $x \in E_k M$ найдутся $\beta \in (0, 1)$, $x', x'' \in M$ такие, что

$$x = \beta x' + (1 - \beta) x'', \quad (10)$$

поскольку $x \in E_{k-1} M$ и, как следствие, $x \in E_1 M$.

Представления типа (10) можно получить из (9) так, как это делается в конце 2.

Случай $n = 2$ означает, что в любом представлении (10) точки $x', x'' \in V$.

Из этого утверждения следует лемма 2.

Действительно, пусть для $x \in E_k M$ и некоторого n , $1 < n \leq k$, имеет место представление

$$x = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n,$$

где точки $z_1, \dots, z_n$ из M аффинно-независимы, положительные числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ таковы, что $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$.

Покажем, например, что $z_1 \in V$. Полагая $\beta = \mu_1$, $x' = z_1$, $x'' = (1 - \beta)^{-1} (\mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n)$, приходим к условиям случая $n = 2$.

Перед доказательством случая $n = 2$ сделаем два замечания.

Замечание 1. Представления (9) и (10) эквивалентны представлению: при всех $t \in [0, 1]$

$$x = t\beta x' + (1 - t)(\lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_k y_k) = t(1 - \beta) x'' + (1 - t)\lambda_1 y_1. \quad (11)$$

Замечание 2. Пусть имеют место (9) и (10), причем $x' \in V$. Тогда существуют $a_1^0, \dots, a_k^0$ такие, что $a_1^0 + \dots + a_k^0 = 1$ и $x' = a_1^0 y_1 + \dots + a_k^0 y_k$. Согласно (9) и (10)

$$x'' = \frac{\lambda_1 - \beta a_1^0}{1 - \beta} y_1 + \dots + \frac{\lambda_k - \beta a_k^0}{1 - \beta} y_k \in V,$$

поскольку

$$(1 - \beta)^{-1} (\lambda_1 - \beta a_1^0 + \dots + \lambda_k - \beta a_k^0) = 1.$$

Таким образом, либо $x', x'' \in V$, либо $x', x'' \in M \setminus V$.

Доказательство случая $n = 2$ ведем от противного. Пусть $x', x'' \in M \setminus V$. Тогда точки

$$x', y_1, \dots, y_k \quad \text{аффинно-независимы,} \quad (12)$$

$$x', x'', y_1, \dots, y_k \quad \text{аффинно-зависимы.}$$

Первое утверждение есть следствие включения $x' \in M \setminus V$, второе получается приравниванием правых частей (9) и (10).

Покажем существование такого $\gamma_0 \in (0, 1]$, что точки

$$x', \gamma_0 x'' + (1 - \gamma_0) y_1, y_2, \dots, y_k \text{ аффинно-независимы.} \quad (13)$$

Действительно, пусть при всех $\gamma \in (0, 1]$ точки

$$x', \gamma x'' + (1 - \gamma) y_1, y_2, \dots, y_k \text{ аффинно-зависимы.} \quad (14)$$

Аффинная оболочка точек $x', y_1, \dots, y_k$ замкнута, а при $\gamma \rightarrow 0$ в (14) приходим к аффинной зависимости точек $x', y_1, \dots, y_k$, что противоречит (12). Итак, имеет место (13).

Выберем t в представлении (11) и найдем такое θ , чтобы выполнялось равенство

$$t(1 - \beta)x'' + (1 - t)\lambda_1 y_1 = \theta \gamma_0 x'' + \theta(1 - \gamma_0) y_1. \quad (15)$$

Имеем

$$t = \frac{\lambda_1 \gamma_0}{\lambda_1 \gamma_0 + (1 - \beta)(1 - \gamma_0)}, \quad \theta = \frac{\lambda_1(1 - \beta)}{\lambda_1 \gamma_0 + (1 - \beta)(1 - \gamma_0)}. \quad (16)$$

Легко установить: $\min(\lambda_1, 1 - \beta) \leq \theta \leq \max(\lambda_1, 1 - \beta)$. Отсюда и из $\gamma_0, \beta \in (0, 1)$ следует $t, \theta \in (0, 1)$.

Из (11) и (15) находим представление

$$x = t\beta x' + \theta(\gamma_0 x'' + (1 - \gamma_0) y_1) + (1 - t)\lambda_2 y_2 + \dots + (1 - t)\lambda_k y_k$$

точки x через $k + 1$ аффинно-независимых точек (13) с положительными коэффициентами. В силу $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ и (16) сумма этих коэффициентов равна единице. Пришли к противоречию с тем, что $x \in E_k M$.

Лемма 3. Пусть для $x \in E_k M$ имеет место (9). Любой n -мерный симплекс, $1 < n \leq k$, с вершинами из M , содержащий точку $y \in M \cap V(y_1, \dots, y_k)$ как внутреннюю точку, целиком лежит в $V(y_1, \dots, y_k)$.

Доказательство. Случай $n = 2$ означает: в любом представлении точки $y \in M \cap V$

$$y = \varepsilon y' + (1 - \varepsilon) y'', \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad y', y'' \in M \quad (17)$$

точки $y', y'' \in V$.

Из этого утверждения следует лемма 3. Действительно, пусть для $y \in M \cap V$ имеет место представление $y = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n$, где $z_1, \dots, z_n \in M$ и аффинно-независимы, а положительные числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ таковы, что $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$.

Полагая $\varepsilon = \mu_1$, $y' = z_1$, $y'' = (1 - \varepsilon)^{-1}(\mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n)$, из утверждения в случае $n = 2$ получаем $z_1 \in V$ и т. д.

Замечание 3. Так как $y \in V$, то для y существует аффинное представление через точки $y_1, \dots, y_k$. Используя это представление в (17), аналогично замечанию 2 получаем, что в любом представлении точки $y \in M \cap V$ типа (17), либо $y', y'' \in V$, либо $y', y'' \in M \setminus V$.

Доказательство случая $n = 2$ ведем от противного. Пусть в представлении (17) $y', y'' \in M \setminus V$ и $y \neq x$. Через точки x и y проведем прямую и обозначим через u ту ее точку пересечения с границей симплекса с вершинами $y_1, \dots, y_k$, при которой x есть внутренняя точка отрезка с концами y и u . Тогда существует представление

$$x = \delta y + (1 - \delta) u, \quad \delta \in (0, 1).$$

Точки $x' = \delta y' + (1 - \delta) u$ и $x'' = \delta y'' + (1 - \delta) u$ принадлежат множеству $M \setminus V$, так как в противном случае точки $y' = \delta^{-1} x' - (1 - \delta) \delta^{-1} u$ и $y'' = \delta^{-1} x'' - (1 - \delta) \delta^{-1} u$ принадлежали бы множеству $M \cap V$. Для x с представлением (9) налицо новое представление $x = \delta x' + (1 - \delta) x''$, где $\delta \in (0, 1)$ и $x', x'' \in M \setminus V$. Последнее противоречит утверждению леммы 2 при $n = 2$, согласно которому $x', x'' \in V$. Следовательно, $y', y'' \in V$.

Доказательство свойства 3 основано на лемме 3. Допустим, свойство 3 не имеет места.

Итак, точки $y_1, \dots, y_k$ из M аффинно-независимы; имеется точка $y \in M \cap V(y_1, \dots, y_k)$, которая при некотором n , $1 < n < k$, принадлежит $E_n(M \cap V(y_1, \dots, y_k))$, но $y \notin E_n M$. Так как $y \in E_n M$, то существует n -мерный симплекс с вершинами $z_1, \dots, z_{n+1}$ из M , содержащий y как внутреннюю точку. В силу леммы 3 точки $z_1, \dots, z_{n+1} \in V$. Следовательно, имеется n -мерный симплекс с вершинами $z_1, \dots, z_{n+1}$ из $M \cap V$, содержащий y как внутреннюю точку. Последнее эквивалентно включению $y \in E_n(M \cap V)$. Полученное противоречие доказывает свойство 3.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ԳԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ս. ԿՈՎՍԵՍՅԱՆ, Կ. Ի. ԽԱԲԱՅԱՆ

Կարգաբեռնողի քննության ընդհանրացումը

Հոկալ ուղղակի տարածության կոմպակտ M ենթարազմության համար մտցվում է K -ծայրակետի գաղափարը, որն ընդհանրացնում է ծայրակետի գաղափարը: Ապացուցված է M բազմության k ծայրակետը, $k > 1$, ներկայացվում է M -ի ոչ ավելի քան k հատ ծայրակետերի ուղղակի գծային կոմբինացիայի տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 У. Рудин. Функциональный анализ, Мир, М., 1975. 2 Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ, Мир, М., 1973.