

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Ф. А. Талалян

Об одном свойстве абсолютной непрерывности векторных полей

(Представлено чл. корр. АН Армении А. А. Талаляном 17/XII 1990)

В (1,2) введены и изучены понятия обобщенно абсолютной непрерывности по Каратеодори и обобщенно абсолютной непрерывности по Витали для функций многих переменных. В настоящей работе мы рассматриваем векторные поля, обобщенно абсолютно непрерывные в заданной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. С помощью результатов работ (1) и (2) доказывается, что указанные векторные поля обладают в рассматриваемой области Ω слабой дивергенцией и при этом для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ имеет место формула Гаусса—Грина. Здесь «для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ » означает следующее: для всех сегментов $J \subset \Omega$, вершины которых принадлежат заданному множеству полной меры в Ω .

Всюду в дальнейшем будем пользоваться обозначениями (2), а также введем еще одно. Если $n, k, i_1, \dots, i_k$ — целые, $\omega_1, \dots, \omega_k$ — действительные числа, причем $n > 1, 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то через $(x)^{i_1, \dots, i_k}_{\omega_1, \dots, \omega_k}$ мы обозначим точку из $\mathbb{R}^n$, полученную из x заменой каждой координаты x_{i_j} на $\omega_j, j = 1, \dots, k$.

Наконец, в следующем определении и далее, символом $\int_J G$ обозначен поверхностный интеграл от векторного поля G по границе ∂J сегмента J .

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n, n > 1$, и $G = (G_1, \dots, G_n)$ — векторное поле в Ω . G называется обобщенно абсолютно непрерывным в Ω , если существует множество $E \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus E) = 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k: k = 1, \dots, l\}$ попарно неперекрывающихся n -мерных сегментов $J_k \subset \Omega$, с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^l \mu_n(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^l \left| \int_{\partial J_k} G \right| < \varepsilon.$$

G называется локально обобщенно абсолютно непрерывным в Ω , если G обобщенно абсолютно непрерывно в каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть векторное поле $G = (G_1, \dots, G_n)$ локально интегрируемо и локально обобщенно абсолютно непрерывно в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда G обладает слабой дивергенцией $\operatorname{div} G \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, причем для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ выполняется равенство

$$\int_{\partial J} G = \int_J \operatorname{div} G d\mu_n. \quad (1)$$

В том случае, когда G обобщенно абсолютно непрерывно в Ω , $\operatorname{div} G \in L^1(\Omega)$.

Для удобства мы разобьем доказательство данной теоремы на следующие четыре шага.

(а) Для любого замкнутого n -мерного сегмента $I \subset \Omega$ существуют функция $f_I \in L^1(I)$ и множество $M_I \subset \Omega$ с $\mu_n(I \setminus M_I) = 0$ такие, что для каждого сегмента $J \subset I$ с вершинами из M_I имеет место равенство

$$\int_{\partial J} G = \int_J f_I d\mu_n. \quad (2)$$

(б) Существуют единственная функция $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и множество $M \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus M) = 0$ такие, что для каждого замкнутого n -мерного сегмента $J \subset \Omega$ с вершинами из M имеет место равенство

$$\int_{\partial J} G = \int_J f d\mu_n. \quad (3)$$

(в) Если G обобщенно абсолютно непрерывно в Ω , то $f \in L^1(\Omega)$.

(г) f есть слабая дивергенция G в Ω .

Доказательство (а). Пусть задан сегмент $I \subset \Omega$ и s есть его вершина с минимальными координатами. Определим на I функцию F следующим образом:

$$F(x) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \int_{r^l([s, x])} G_l((w)_{x_l}^l) d\mu_{n-1}(r^l(w)), \quad w \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Тогда рассматривая произвольный сегмент $J = [a, b] \subset I$ с $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ и полагая для каждой его вершины v , $\tau(v) = \{l: v_l = b_l\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\partial J} G &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{r^i(J)} G_i((w)_{\partial_i}^l) d\mu_{n-1}(r^i(w)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \int_{r^i(J)} G_i((w)_{\partial_i}^l) d\mu_{n-1}(r^i(w)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \times \\ &\times \sum_{\substack{1 \leq k_1, \dots, k_l \leq n \\ k_1, \dots, k_l \neq i}} \int_{r^l\left(\left[c, (b)_{a_{k_1}, \dots, a_{k_l}}^{k_1, \dots, k_l}\right]\right)} G_l((w)_{\partial_l}^l) d\mu_{n-1}(r^l(w)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{\substack{1 \leq k_1, \dots, k_l \leq n \\ k_1, \dots, k_l \neq i}} \int_{r^l\left(\left[c, (b)_{a_{k_1}, \dots, a_{k_l}}^{k_1, \dots, k_l}\right]\right)} G_l((w)_{\partial_l}^l) d\mu_{n-1}(r^l(w)) = \\ &= \sum_v \left[\sum_{l \in \tau(v)} (-1)^{l-1+q(v, a)} \int_{r^l([c, v])} G_l((w)_{\partial_l}^l) d\mu_{n-1}(r^l(w)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \notin \tau(v)} (-1)^{l+q(v, a)+1} \int_{r^l([c, v])} G_l((w)_{\partial_l}^l) d\mu_{n-1}(r^l(w)) \right] = \\ &= \sum_v (-1)^{q(v, a)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{r^i([c, v])} G_i((w)_{\partial_i}^l) d\mu_{n-1}(r^i(w)) = \\ &= \sum_v s(v; J) F(v) = \Delta_n(F; J). \end{aligned}$$

Таким образом доказано равенство

$$\int_{\partial J} G = \Delta_n(F; J) \quad (5)$$

для каждого сегмента J , содержащегося в I .

В си. у условия теоремы в равенстве (5) функция F обобщенно абсолютно непрерывна по Витали на I . Теперь существование f_l и M_l следует из теоремы 1 работы (2) при $\Omega = I$.

Доказательство (б). Представим Ω в виде

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad (6)$$

где каждое Q_k есть замкнутый n -мерный двоичный куб, причем различные Q_k не перекрываются и каждое компактное подмножество Ω покрывается объединением конечного числа кубов Q_k . Пусть для каждого k f_{Q_k} и $M_{Q_k} \subset \text{Int}(Q_k)$ построены согласно (5). Положим

$$f(x) = f_{Q_k}(x) \quad \text{при } x \in Q_k. \quad (7)$$

Возьмем множество $E \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus E) = 0$ так, чтобы для каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ множество $\Omega_0 \cap E$ удовлетворяло условию обобщенно абсолютной непрерывности в Ω_0 векторного поля G . Удалив из $E \cap (\cup Q_k)$ подходящее множество нулевой меры, можно построить множество M такое, что

$$M \subset E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{Q_k} \right), \quad \mu_n(\Omega \setminus M) = 0 \quad (8)$$

$$\text{и } M_i^t = \emptyset \quad \text{или} \quad \mu_{n-1}(\Omega_i^t \setminus M_i^t) = 0 \quad (9)$$

для каждого $i = 1, \dots, l$ и действительного числа t .

Построенные f и M удовлетворяют утверждению (6). Очевидно, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и $\mu_n(\Omega \setminus M) = 0$. Проверим равенство (3). Пусть $J \subset \Omega$ — замкнутый n -мерный сегмент с вершинами из M . Для каждого $\delta > 0$, выбирая m настолько большим, чтобы

$$J \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k,$$

и воспользовавшись условиями (8) и (9), сегмент J можно представить в виде конечного объединения попарно неперекрывающихся сегментов

$$J = \left(\bigcup_{i=1}^p J_i' \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^q J_i'' \right) \quad (10)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) каждый сегмент J_i' содержится в некотором кубе Q_k , $k \leq m$, и его вершины принадлежат соответствующему множеству M_{Q_k} ;

2) вершины каждого сегмента J_i'' принадлежат множеству E и

$$\sum_{i=1}^p \mu_n(J_i') < \delta. \quad (11)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы оно удовлетворяло условию локальной обобщенно абсолютной непрерывности в Ω векторного поля G и чтобы при $A \subset J$ и $\mu_n(A) < \delta$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_A f d\mu_n \right| < \varepsilon. \quad (12)$$

Для выбранного $\delta > 0$, построив разложение (10), в силу (2), (7)–(12) будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial J} G - \int_{\bar{J}} f d\mu_n \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^p \int_{\partial J_i} G - \sum_{i=1}^p \int_{J_i} f d\mu_n \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^q \int_{\partial J_i^*} G \right| + \left| \int_{\cup J_i^*} f d\mu_n \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу произвольности ε из (13) получим (3).

Доказательство (в). Пусть область Ω ограничена и векторное поле G обобщенно абсолютно непрерывно в Ω . Представим Ω в виде объединения счетного числа попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из M :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Положим

$$\Omega_m = \bigcup_{k=1}^m J_k; \quad m = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\left| \int_{\Omega_q} f d\mu_n - \int_{\Omega_p} f d\mu_n \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \int_{J_k} f d\mu_n \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \int_{\partial J_k} G \right|. \quad (14)$$

Так как $\mu_n(\Omega_p) \rightarrow \mu_n(\Omega)$ при $p \rightarrow \infty$, то из (14) следует, что предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f d\mu_n$$

существует и конечен для любой последовательности областей Ω_m указанного вида. Отсюда следует интегрируемость f на Ω .

Доказательство (г). Требуется доказать равенство

$$\int G \nabla \varphi d\mu_n = - \int f \varphi \mu_n, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (15)$$

Здесь мы следуем рассуждениям ⁽³⁾. Пусть Ω' — ограниченная область, содержащая носитель φ с замыканием $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Возьмем некоторую положительную функцию $\rho \in C_0^\infty$ с носителем, содержащимся в единичном шаре, для которой

$$\int \rho d\mu_n = 1$$

и для каждого положительного $t < \text{dist}(\bar{\Omega}', \partial\Omega)$ положим

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t^n} \rho\left(\frac{x}{t}\right).$$

Далее, определим f_i и G_i на Ω следующим образом:

$$f_i = f * \rho_i; \quad G_i = (G_1 * \rho_i, \dots, G_n * \rho_i).$$

В силу (3) и теоремы Фубини для каждого замкнутого сегмента $J \subset \Omega'$ с вершинами из M имеем

$$\begin{aligned} \int_J f_i d\mu_n &= \int_J \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \rho_i(y) d\mu_n(y) \right) d\mu_n(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{J-y} f d\mu_n \right) \rho_i(y) d\mu_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial(J-y)} G \right) \rho_i(y) d\mu_n(y). \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, применяя формулу Гаусса—Грина и теорему Фубини, получим

$$\int_J \operatorname{div} G_i d\mu_n = \int_J G_i = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial(J-y)} G \right) \rho_i(y) d\mu_n(y). \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что для каждого сегмента $J \subset \Omega'$

$$\int_J \operatorname{div} G_i d\mu_n = \int_J f_i d\mu_n,$$

откуда

$$\operatorname{div} G_i = f_i \text{ в } \Omega'. \quad (18)$$

Теперь из (18) и теоремы Фубини следует

$$\begin{aligned} \int f \varphi d\mu_n &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int f_i \varphi d\mu_n = \lim_{t \rightarrow 0+} \int \operatorname{div} G_i \varphi d\mu_n = \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0+} \int G_i \nabla \varphi d\mu_n = - \int G \nabla \varphi d\mu_n. \end{aligned}$$

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армении

Ն. Ա. ՔԱԼԱՅԱՆ

Վեկտորական դաշտերի բացարձակ անընդհատության որոշ
հատկության մասին

Դիտարկված են որոշակի ընդհանրացված իմաստով բացարձակ անընդ-
հատ վեկտորական դաշտեր n -չափանի տիրույթներում: Ստացված է, որ
նշված դաշտերը ունեն թույլ դիվերգենցիաներ, և որ նրանք բավարարում են
Գաուս-Դրիշի բանաձևին համարյա բոլոր սեգմենտների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Талалян, Ф. А. Талалян, Изв. АН АрмССР. Мат., т. 24, № 1, с. 3—21 (1989).
² Ф. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, Мат., т. 26, № 2 (1991). ³ Г. Bagby,
W. P. Ziemer, Trans. Amer. Math. Soc., v. 191, p. 129—148 (1974)