УДК 514.17

Р. Ц. Мусаелян

Существование бесконечных многоугольников в двумерной метрике
переменной отрицательной кривизны

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 11/XII 1990)

В работе рассматривается существование в E^2 некоторых классов выпуклых* некомпактных областей на двумерных многообразиях переменной отрицательной гауссовой кривизны. Рассматриваемые некомпактные множества называются бесконечными многоугольниками (БМ). На плоскостях Лобачевского (на многообразиях постоянной отрицательной кривизны) существование таких областей известно. Дадим определение БМ.

Определение 1. *Выпуклое множество, состоящее из пересечения конечного или счетного множества полуплоскостей**, границы которых не имеют общих точек, называется бесконечным многоугольником.*

Граница полученного таким образом множества состоит из полных геодезических линий, которые назовем сторонами БМ. Две стороны называются соседними, если они параллельны (точное понятие параллельности будет определено ниже, кратко—это геодезические линии, сходящиеся на абсолюте).

Из множества всех БМ, у каждого из которых любая сторона имеет две соседние, выделим два множества, которые будем, как и в работе (1), обозначать M_1 и M_2 .

Определение 2. *Множество M_1 состоит из БМ, для каждого из которых можно указать отвечающий ему орицикл*** O в заданной метрике такой, что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон этого многоугольника на указанный орицикл положительна.*

* Область D в метрике переменной отрицательной кривизны называется выпуклой, если отрезок геодезической, соединяющий любые две точки, принадлежащие D , целиком содержится в D .

** Часть полной метрики, ограниченную геодезической, будем называть полуплоскостью.

*** Это понятие будет определено ниже.

Определение 3. Множество M_2 состоит из БМ, для каждого из которых точная нижняя грань длин ортогональных проекций сторон рассматриваемого многоугольника на данную сторону БМ положительна.

Будем рассматривать метрику, заданную посредством линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2. \quad (1)$$

Пусть метрика (1) кривизны $K(x, y) < 0$ задана на всей плоскости xOy .

Справедлива следующая теорема.

Основная теорема. В метрике* (1) существуют БМ, принадлежащие классам M_1 и M_2 .

Дадим описание некоторых понятий, которые необходимы в дальнейшем.

Пусть a — заданная геодезическая линия в метрике (1). Фиксированная точка $N_0 \in a$ разбивает a на два луча** a^+ и a^- . Пусть N — произвольная точка луча a^+ , находящаяся от N_0 на расстоянии s . Рассмотрим открытый геодезический круг $\omega_{0,s}$ — радиуса s с центром в точке N . Граница $\omega_{0,s}^*$ этого круга представляет собой геодезическую окружность, которая проходит через точку N_0 , ортогональную лучу a^+ .

Определение 4. Объединение $\Omega = \cup \omega_{0,s}$ называется орикругом с центральным лучом a^+ (см. (3)).

Определение 5. Граница Ω^* орикруга Ω называется орициклом.

Определение 6. Луч a_N^+ с началом в точке N_0 называется параллельным лучом для луча a^+ , проведенным из точки $N_0 \in \Omega$, если существует последовательность отрезков $N_n p(s_n)$, где $p(s_n) \in a^+$, $N_n \in \Omega$, $N_n \rightarrow N_0$, $s_n \rightarrow \infty$, которая сходится к a_N^+ .

В работе (3) доказываются свойства, относящиеся к орикругу и орициклу.

Далее будем пользоваться работой (4) А. Д. Александрова. В упомянутой работе предполагается, что линейный элемент задан в замкнутой области, граница которой имеет конечную длину — «периметр области».

* Для простоты рассмотрено существование БМ в метрике (1). Можно доказать существование БМ в полных двумерных метрических пространствах отрицательной кривизны. При этом отрицательность кривизны метрического пространства определяется так: для каждого его геодезического треугольника отрезок средней линии меньше половины основания (см. (2)).

** Г. Буземан (2) определяет луч с началом в точке P как половину геодезической линии, проходящей через точку P .

Определение 7. Будем говорить, что в области D кривизна меньше или равна κ ($\geq \kappa$), если для всякого геодезического треугольника, лежащего в D , отношение его дефекта^{*} $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ к площади меньше или равно κ ($\geq \kappa$).

В работе (4) приводится следующая лемма

Лемма 1. Если в треугольнике T кривизна не превосходит $\kappa < 0$, то углы этого треугольника не больше, чем соответствующие углы треугольника T_0 со сторонами той же длины на плоскости Лобачевского кривизны κ^{**} . И если хотя бы один угол треугольника T равен соответствующему углу треугольника T_0 , то треугольники T и T_0 изометричны (далее треугольник T_0 будет называться «соответствующим» T).

Эта лемма имеет место (см. (5)) и в том случае, когда в треугольнике T имеется непрерывная гауссова кривизна. В дальнейшем лемму 1 будем рассматривать для случая гауссовой кривизны.

Для доказательства основной теоремы нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения, которые мы здесь приведем без доказательства.

Пусть l_1 и l_2 — две ортогональные геодезические линии в метрике (1) и $l_1 \cap l_2 = A$. Ориентируем прямые l_1 и l_2 так, чтобы при повороте l_1^+ против часовой стрелки на 90° совпала с l_2^+ , где началом лучей l_1^+ и l_2^+ берется точка A . Предположим, что геодезическая γ_1 параллельна l_1^+ и $\gamma_1 \cap l_2^+ = R$. Обозначим длину отрезка $AR = z$, угол^{***} $\angle AR\gamma_1^+ = \alpha(z)$, где γ_1^+ — луч геодезической γ_1 с началом в точке $R \in l_2^+$ и такой, что γ_1^+ параллельна l_1^+ . Пусть в замкнутой области $D_z = \{l_1^+ AR\gamma_1^+\}$ с границей $\partial D_z = l_1^+ \cup AR \cup \gamma_1^+$ кривизна метрики (1) ограничена сверху константой κ_0 , где $\kappa_0 < 0$.

Пусть $\Pi_{\kappa_0}(z)$ — функция Лобачевского для плоскости, кривизна которой равна κ_0 .

Справедливо утверждение:

Теорема 1. При сформулированных условиях в области D_z справедливо неравенство

$$\alpha(z) \leq \Pi_{\kappa_0}(z). \quad (2)$$

При сформулированных выше условиях справедлива следующая

Теорема 2. Функция $\alpha(z)$, приведенная в теореме 1, монотонно убывает.

Далее для любых двух геодезических линий справедлива

* А. Д. Александров называет его (см. (4)) сферическим избытком.

** В работе (4) евклидова плоскость считается частным случаем плоскости Лобачевского.

*** Понятие угла понимается обычным образом (см. (2)).

Теорема 3. Для произвольных геодезических h_1 и h_2 существует такая точка $O_1 \in h_1$, что луч h_{12}^+ , проходящий через эту точку параллельно h_2^+ , составляет с лучом h_1^+ неострый угол.

То есть $\angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ \geq \frac{\pi}{2}$.

Теорема 4. Пусть h_1 и h_2 — произвольные геодезические в метрике (1), $O_1 \in h_1^+$ — отвечающая теореме 3 точка, Ω_1^* — орицикл с центральным лучом h_1^+ , проходящий через точку O_1 . Пусть точка O_2 принадлежит „верхней“^{***} части орицикла Ω_1^* . Тогда, если из точки O_1 и O_2 проведены лучи h_{12}^+ , h_{11}^+ и h_{22}^+ параллельно соответственно h_2^+ , h_1^+ и h_2^+ , то $\angle h_{11}^+ O_1 h_{12}^+ = \angle h_{21}^+ O_2 h_{22}^+$.

Следствие 1. Пусть Ω^* орицикл с центральным лучом l^+ и $l^+ \cap \Omega^* = p$. Пусть точки $p_1, p_2 \in \Omega^*$ находятся в одной полуплоскости определенными l , длина дуги pp_1 орицикла Ω^* меньше длины дуги pp_2 , q_1^+, q_2^+ — центральные лучи орицикла, проходящие через p_1 и p_2 соответственно. Тогда $\angle c_2 p_2 q_2^+ < \angle c_1 p_1 q_1^+$, где $p_i c_i, i=1, 2$, — отрезки геодезических, проходящих через точки $p_i, i=1, 2$ и ортогональны l^+ .

Теорема 5. Пусть h_1^+, h_2^+, Ω_1^* и $O_1 = \Omega_1^* \cap h_1$ определены как в теореме 4. Тогда существует (притом единственный) орицикл с центральным лучом h_2^+ , который касается^{**} орицикла Ω_1^* .

Из этой теоремы вытекает очень важное следствие:

Следствие 2. Для любых геодезических h_1 и h_2 существует единственная геодезическая h_3 , которая параллельна выбранным лучам на прямых h_1 и h_2 .

Доказательство основной теоремы. Сначала приведем доказательство существования произвольных бесконечных многоугольников в метрике (1).

1) Пусть Γ — произвольная кривая (геодезическая линия или регулярная кривая с ограниченной геодезической кривизной) в метрике (1). Кривая Γ разбивает метрику на две части, которые назовем полуплоскостями. Возьмем произвольное разбиение кривой Γ с помощью точек $\xi_i \in \Gamma$, где $i \in I$, а J — множество, вообще говоря, не счетное. В каждой точке $\xi_i \in \Gamma$ проведем геодезическую, ортогональ-

* Часть орицикла Ω_1^* , которая расположена в ту же сторону от h_1 , что и h_2^+ , назовем „верхней“ частью

** Будем говорить, что два орицикла касаются в точке M , если в этой точке существует единственная опорная геодезическая. Здесь под опорной геодезической понимается следующая опорной геодезической кривой L называется геодезическая, содержащая по меньшей мере одну точку кривой L , но не разделяющая никаких двух ее точек (см. (3)).

ную Γ , которую обозначим h_i . Из теории дифференциальных уравнений следует, что геодезические $h_i, i \in J$ определяются однозначно (дифференциальное уравнение геодезических — уравнение второго порядка). Геодезические h_i и $h_j, i, j \in J$ назовем ближайшими, если между точками $\xi_i, \xi_j \in \Gamma$ нет других точек разбиения. Из свойства функции $\bar{v}(x, y)$ следует, что в указанной полуплоскости, определяемой кривой Γ , не могут быть и параллельные и расходящиеся геодезические пары $h_{i'}, h_{j'},$ где $i', j' \in J$.

Согласно следствию 2, для ближайших геодезических $h_i, h_j, i, j \in J$, вообще говоря, в обеих полуплоскостях кривой Γ существуют так называемые общие параллельные $\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2, \delta_{ij}^3, i, j \in J, \alpha = 1, 2$, параллельные h_i и h_j . Здесь индекс $\alpha = 1, 2$ показывает принадлежность прямых δ_{ij}^α верхней или нижней полуплоскостям, порожденным кривой Γ соответственно. Множество, граница которого состоит из полных геодезических $\delta_{ij}^\alpha, i, j \in J, \alpha = 1, 2$, очевидно, будет той выпуклой областью, о которой говорится в определении бесконечных многоугольников.

2) Докажем, что существуют бесконечные многоугольники, принадлежащие классам M_1 и M_2 .

Пусть множество J конечное или счетное и разбиение Γ точками $\xi_i \in \Gamma, i \in J$ такое, что нижняя грань длины дуг $\xi_i \xi_j$ больше нуля. Здесь $\xi_i = h_i \cap \Gamma, \xi_j = h_j \cap \Gamma$, а h_i и h_j ближайшие геодезические. Очевидно, $\xi_i \xi_j$ есть проекция геодезической $\delta_{ij}^\alpha, i, j \in J, \alpha = 1, 2$ на кривую Γ . Построение многоугольников БМ, принадлежащих к классу M_1 и классу M_2 , очевидно.

Из этой теоремы и из понятия БМ, введенного в начале работы, следует несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1. *Существуют БМ, для которых не каждая сторона имеет соседнюю.*

Примерами таких многоугольников могут служить многоугольники, содержащиеся в полуплоскости.

З а м е ч а н и е 2. *Существуют БМ, любая сторона которых не имеет соседнюю.*

З а м е ч а н и е 3. *Любой БМ с конечным числом сторон принадлежит к классу M_1 и классу M_2 одновременно.*

З а м е ч а н и е 4. *Множества M_1 и M_2 различные, т. е. имеются БМ $\in M_1$ и не принадлежащие M_2 , и наоборот.*

Степанакертский филиал
Ереванского политехнического института

Անվերջ բազմանկյունների գոյությունը երկչափ փոփոխական բացասական կուրվայուն շափերում

Այս աշխատանքում դիտարկվում է փոփոխական կորույթուն

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2 \quad (1)$$

որոշ ոչ կամպակտ ուռուցիկ տիրույթների գոյությունը էվկլիդեսյան եռաչափ տարածություններում՝ E^3 -ում: Դիտարկվող տիրույթները աշխատանքում կոչվում են անվերջ բազմանկյուններ: Անվերջ բազմանկյունները երկչափ հաստատուն բացասական կորույթյան բազմաձևություններում (Հորաշևեթի հարթություններում) միշտ գոյություն ունեն: Հոդվածում բերվում են մի շարք օժանդակ թեորեմներ (առանց ապացույցների), որոնք անհրաժեշտ են աշխատանքի հիմնական թեորեմի ապացուցման համար: Այդ թեորեմների ապացույցը բերվում է հոդվածում, ձևակերպվում է այսպես:

Հիմնական թեորեմ: (1) շափում գոյություն ունեն անվերջ բազմանկյուններ պատկանող M_1 և M_2 դասերին:

Նշենք, որ հոդվածում արվում է M_1 և M_2 դասերի սահմանումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Э. Г. Позняк. Мат. сб., т. 102, № 1, с. 3—12 (1977). 2 Г. Буземан. Геометрия геодезических, Мир, М., 1962. 3 Е. В. Шиким. Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны. Докт. дис., М., 1976. 4 А. Д. Александров, ДАН СССР, т. 47, № с. 239—242 (1945). 5 Э. Карган. Геометрия римановых пространств. ОНТИ НКТП СССР, М., 1936.