МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. О. Саркисян

Об уравнениях двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек

(Представлено академиком АН Армении С. А. Амбарцумяном 28/IX 1990)

Основные положения двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек и пластин изложены в (1), хотя в ней недостаточно полно были разработаны общие методы сведения трехмерной проблемы магнитоупругости в целом к двумерной.

В работах (2-4) изучены асимптотические свойства решений всех групп уравнений, определяющих проблему магнитоупругости в целом в тонкой области оболочки, построены асимптотически обоснованные общие двумерные уравнения магнитоупругости тонких оболочек. В работах (4-6) построено вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек и доказаны основные энергетические теоремы.

В работах (7-8) построены нелинейные по параметрам индуцированного магнитного поля уравнения динамики тонких упругих оболочек в постоянных и переменных магнитных полях. Оценены асимптотические погрешности приведения названных уравнений к двум предлагаемым линейным формам.

Следует отметить (речь идет только о линейной задаче), что уравнения двумерной теории магнитоупругости, представленные в работе (7), по своему виду, вообще говоря, отличаются от аналогичных уравнений, получаемых в работах (2-3). Возникает естественный вопрос, каковы взаимоотношения этих систем уравнений, характеризующих колебания тонких оболочек в магнитном поле.

Настоящая работа посвящена указанному вопросу. Кроме того, в данной работе получен новый, на наш взгляд, весьма важный результат—построена новая система двумерных дифференциальных уравнений с соответствующими каноническими граничными условиями, определяющими проблему магнитоупругости тонких оболочек.

1. Уравнения общей двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, представленные в работах (2-4), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{1}{R_1} \left| \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right| + \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \frac{1}{R_2} \left| \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right| - \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \right| \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \\ & \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right| + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \times \\ & \times \left[\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] + \\ & + \frac{1}{c} \bar{j}_1 B_{02} - \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{01} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{j}_1(a_1, a_2, t) + 2\rho h \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w(a_1, a_2, t)}{\partial t} + 2\rho h \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1(a_1, a_2, t)}{\partial t} \right) \vec{e}_1 + \\ & + \left(\bar{j}_2(a_1, a_2, t) - 2\rho h \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2(a_1, a_2, t)}{\partial t} - 2\rho h \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w(a_1, a_2, t)}{\partial t} \right) \vec{e}_2 = \\ & = - \frac{2\rho h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\bar{j}_1(a'_1, a'_2, t) \vec{e}_1 + \bar{j}_2(a'_1, a'_2, t) \vec{e}_2}{R_{PQ}} d\Omega, \quad Q, P \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь кроме общепринятых обозначений теории тонких оболочек ⁽⁹⁾, $\bar{j}_1, \bar{j}_2$ — компоненты поверхностной плотности тока проводимости; R_{PQ} — расстояние между двумя точками (α_1, α_2) и (α'_1, α'_2) на срединной поверхности оболочки Ω , $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ базисные векторы для срединной поверхности оболочки в указанных точках; B_{0k} , $k = 1, 2, 3$ — вектор напряженности заданного стационарного магнитного поля; ρ — электропроводимость материала оболочки.

К уравнениям (1.1), (1.2) следует присоединить соотношения упругости, канонические граничные условия теории тонких оболочек ⁽⁹⁾, а также канонические граничные условия для электродинамической части задачи ⁽⁴⁾

$$\bar{j}_1|_r = \bar{j}_2|_r = 0, \quad (1.3)$$

а также начальные условия ⁽²⁻⁴⁾.

Компоненты поверхностей плотности тока проводимости $\bar{j}_1$ и $\bar{j}_2$ выражаются формулами (4)

$$\begin{aligned}\bar{j}_1 &= 2sh \left(E_{20} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right), \\ \bar{j}_2 &= 2sh \left(E_{10} + \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).\end{aligned}\quad (1.4)$$

где E_{i0} , $i = 1, 2$ — тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля в точках срединной поверхности оболочки, которые удовлетворяют уравнению (2.3)

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 E_{20}) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 E_{10}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial h_{30}}{\partial t}.\quad (1.5)$$

Здесь h_{30} — нормальная компонента к срединной поверхности оболочки вектора индуцированного магнитного поля в точках срединной поверхности оболочки.

Компоненты поверхностной плотности электрического тока удовлетворяют уравнению (2.4)

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{j}_1) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \bar{j}_2) = 0,\quad (1.6)$$

представляющему двумерный аналог уравнения $\text{div } \vec{j} = 0$ в случае трехмерной постановки задачи

Для определения величин, характеризующих электромагнитное поле в окружающей оболочку среде (вакууме), имеем следующие уравнения (2.4):

$$\text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \vec{h}^{(e)} = 0,\quad (1.7)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{(e)} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E}^{(e)} = 0.\quad (1.8)$$

Отметим, что на уровне точности созданной двумерной теории (1.1) — (1.6) область трехмерной оболочки для изучения внешней задачи электродинамики можно рассматривать как математический разрез вдоль срединной поверхности оболочки Ω , при этом тангенциальные компоненты вектора $\vec{h}^{(e)}$ на указанном разрезе будут терпеть разрывы (величина которых соответственно равна компоненте поверхностной плотности тока проводимости $\bar{j}_1$ или $\bar{j}_2$); нормальная компонента вектора $\vec{h}^{(e)}$, а также тангенциальные компоненты вектора $\vec{E}^{(e)}$ будут непрерывными.

Вводим скалярный магнитный потенциал Φ , определяемый формулой

$$\vec{h}^{(c)} = \text{grad } \Phi. \quad (1.9)$$

Принимая во внимание (1.9), из (1.7) получим, что магнитный потенциал Φ будет удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве

$$\Delta \Phi = 0, \quad (1.10)$$

а на разрезе вдоль Ω будет претерпевать соответствующие разрывы.

Вихревой поверхностный ток, возбуждаемый в срединной поверхности оболочки, будем характеризовать функцией тока i (10, 11), которую определим равенствами

$$\vec{j}_1 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \vec{j}_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad (1.11)$$

где в данном случае

$$F = \Phi^+ - \Phi^-. \quad (1.12)$$

Если компоненты поверхностной плотности электрического тока будут определяться через функции тока по формулам (1.11), то уравнение (1.6) будет тождественно удовлетворяться. Подставив (1.11) при помощи (1.4) в уравнение (1.5), приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_2 F = -\frac{2\gamma h}{c} \frac{\partial h_{30}}{\partial t} - \frac{2\gamma h}{c} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_2 \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial t} + B_{02} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A_1 \left(B_{03} \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{04} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) \right], \quad (1.13)$$

$$h_{30} = \frac{1}{2} |(\text{grad } \Phi)_2^+ + (\text{grad } \Phi)_2^-| \vec{n},$$

где $\vec{n}$ — нормаль к срединной поверхности оболочки; Δ_2 — оператор Лапласа на криволинейной поверхности оболочки

$$\Delta_2(\cdot) = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_2} \right). \quad (1.14)$$

Систему уравнений (1.1), (1.10) — (1.13) можно представить как уравнения, определяющие магнитоупругое состояние тонкой оболочки. Эти уравнения и совпадают с уравнениями работы (7).

Как можно убедиться из вывода уравнений (1.10) — (1.13), они были получены совершенно простыми математическими средствами из уравнений работ (2-4), т. е. из уравнений (1.5) — (1.7). Следовательно, определяющая система уравнений магнитоупругости тонких оболочек (1.1), (1.10) — (1.13) представляется проще в других определяющих величинах.

Отметим, что уравнения (1.10) — (1.13) следует решать в бесконечном трехмерном пространстве с соответствующими условиями на бесконечности. В уравнениях (1.1), (1.2) в скрытом виде тоже присутствует решение внешней задачи электродинамики (1.7), (1.8) в бесконечном трехмерном пространстве. Этим решением определяется ядро интегрального уравнения (1.2), представляющее собой функцию источника для уравнений (1.7) и (1.8), вид которого заранее известен⁽¹²⁾ — это обратная величина трехмерного расстояния между двумя точками в пространстве, на основе которой и были получены интегральные уравнения (1.2).

В работах (3, 8), во-первых, построены нелинейные по параметрам индуцированного магнитного поля уравнения динамики тонких оболочек в постоянных и переменных по времени магнитных полях, во-вторых, разработан асимптотический подход к решению системы уравнений (1.1), (1.10) — (1.13), при которых указанная сложнейшая задача решается в несколько этапов, на каждом из которых решаются относительно более простые системы уравнений.

Построенные в работах (2-4) асимптотические разложения для всех величин, определяющих трехмерную задачу магнитоупругости при тонкой области оболочки, имеют место в следующих случаях^(2, 4):

1) когда $2\rho < l$, $\omega = 1$ и 2) когда $2\rho \geq l$, $\omega = \frac{2\rho}{l}$, где $\frac{\rho}{l}$ показ-

атель изменяемости магнитоупругости состояния, ω — показатель изменяемости по времени. В первом случае мы имеем дело с относительно высоким показателем изменяемости по времени, которому соответствуют двумерные уравнения (1.1), (1.2), или системой уравнений (1.1), (1.10) — (1.13), для которой решение (или использование готового решения) внешней задачи электродинамики обязательно.

Во втором случае мы имеем дело с относительно низким показателем изменяемости магнитоупругого состояния. В этом случае уравнение (1.5) будет представляться следующим образом:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 E_{20}) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 E_{10}) = 0. \quad (1.15)$$

Так как уравнение (1.13) было получено на основе уравнения (1.5), следовательно, имея в виду (1.15), вместо уравнения (1.13) будем иметь

$$\Delta_2 F = -\frac{2zh}{c} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[A_2 \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \left[A_1 \left(B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \right\}. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.1), (1.16) с учетом (1.11) будут представлять разрешающую систему уравнений двумерной теории магнитоупругости

тонких оболочек (в случае низкой изменчивости магнитоупругого состояния по времени). Граничные условия будут представлять классические граничные условия теории тонких оболочек ⁽⁹⁾ и канонические условия (1.3).

Как можно убедиться, в случае относительно низкой изменчивости магнитоупругого состояния во времени трехмерная задача магнитоупругости приводится к чисто двумерной проблеме, для которой заранее не нужно решать (или использовать готовое решение) внешнюю задачу электродинамики для всего трехмерного пространства.

Двумерные уравнения магнитоупругости тонких оболочек (1.1), (1.16) полностью совпадают с соответствующими уравнениями работы ⁽⁷⁾.

Следует отметить, что при низком показателе изменчивости $\left(\omega = \frac{2\rho}{l}\right)$ магнитоупругого состояния во времени упрощаются также уравнения (1.1), где следует отбросить тангенциальные составляющие силы инерции и силы электромагнитного происхождения, т. е. в данном случае будут иметь место преимущественно нормальные формы колебаний.

2. При относительно низкой изменчивости магнитоупругого состояния во времени $\left(\omega = \frac{2\rho}{l}\right)$ можно построить совершенно новую систему двумерных дифференциальных уравнений магнитоупругости тонких оболочек.

Из уравнения трехмерной электродинамики для тела проводящей оболочки ⁽¹⁾

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right), \quad (2.2)$$

будет следовать следующее векторное уравнение:

$$\Delta \vec{j} = -\frac{\sigma}{c} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) + \frac{\sigma}{c} \Delta \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (2.4)$$

где Δ —трехмерный векторный оператор Лапласа.

Из первых двух скалярных уравнений (2.3) с помощью асимптотического подхода, развитого в работах ⁽²⁻⁴⁾, получается следующая система дифференциальных уравнений относительно компонент поверхностного тока проводимости $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_2$:

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (\bar{U}_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial z_2} (\bar{U}_1 A_1) \right] \right\} =$$

$$= \frac{2\alpha h}{c} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(A_2 B_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z_2} \left(A_1 B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \right\},$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (\bar{V}_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial z_2} (\bar{V}_1 A_1) \right] \right\} =$$

$$= \frac{2\alpha h}{c} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(A_2 B_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z_2} \left(A_1 B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \right\}. \quad (2.5)$$

Система дифференциальных уравнений (1.1), (2.5) является разрешающей системой двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек. К этим уравнениям необходимо добавить соотношения упругости, классические граничные и начальные условия теории тонких оболочек⁽⁹⁾, канонические граничные условия (1.3), а также условие (1.6).

Следует отметить, что третье уравнение векторного уравнения (2.3) на указанном асимптотическом уровне будет удовлетворяться тождественно.

При подстановке (1.11) уравнения (2.5) удовлетворяются тождественно.

Ленинаканский филиал

Ереванского политехнического института

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Քարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության հավասարումների մասին

Քննարկվում են քարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության հավասարումների մի քանի տեսքերը և նրանց փոխկապակցվածությունը:

Կառուցվում է քարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության դիֆերենցիալ հավասարումների մի նոր համակարգ, համապատասխան կանոնիկական եզրային պայմաններով:

Քարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության դիֆերենցիալ հավասարումների այս նոր համակարգի և համապատասխան եզրային խնդրի կառուցումը ներկայացվում է որպես միանգամայն նոր արդյունք այդ ընագավառի մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Бведасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² С. О. Саркисян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 38, № 6, с. 21—34 (1985). ³ С. О. Саркисян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 42, № 5, с. 25—34 (1989). ⁴ С. О. Саркисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 181—186 (1989).

5 С. О. Саркисян, Уч. записки Ереванского ун-та. Естествен. науки, № 2, с. 41—46, 1985. 6 С. О. Саркисян, Межвуз сб научн. трудов Механика, Изд. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111, 1987. 7 А. Л. Радовинский, Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. № 4, с. 164—170, 1987. 8 А. Л. Радовинский, Общие теоремы электромеханики тонких упругих оболочек ПММ, т. 53, вып. 4, с. 658—664 (1989). 9 В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек Л., Судпромгиз, 1962. 10 Л. А. Цейтлин, ЖТФ, т. 39, вып. 10, с. 1733—1741 (1969). 11 В. И. Астахов, И. М. Грудский, Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, № 2, с. 5—14, 1989. 12 Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков, Электродинамика, Высшая школа, М., 1980.