ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 536.24

Р. С. Минасян

Течение тепла в призматическом теле прямоугольного сечения, движущемся с постоянной скоростью

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 23/XI 1990)

Рассмотрим плоское нестационарное течение тепла в призматическом теле прямоугольного поперечного сечения, движущемся с постоянной скоростью, компоненты которой равны v_x, v_y, когда внутри тела действуют источники тепла, интенсивность которых линейно зависит от температуры*. Дифференциальное уравнение теплопроводности с учетом конвекции будет иметь вид [1]

$$\frac{DU}{Dt} - a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \alpha U + \frac{1}{\rho c} w(x, y, t), \tag{1}$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$ обозначает так называемую субстанциональную, или полную, производную [1], $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность, $w(x, y, t)$ — интенсивность тепловыделения, не зависящая от температуры $U(x, y, t)$. Предположим, что на границе области происходит теплообмен с окружающей средой. Начальное условие и условия на границе будут

$$U(x, y, 0) = L(x, y); \quad -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0[T_0(y, t) - U(0, y, t)];$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=b} = h_1[T_1(y, t) - U(b, y, t)];$$

$$-\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = h_2[S_0(x, t) - U(x, 0, t)]; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=d} = h_3[S_1(x, t) - U(x, d, t)].$$

---

* Внутри твердого тела тепло может образовываться в результате пропускания электрического тока, при радиоактивном распаде [2] и т. п.

Для нахождения решения применим преобразование Лапласа, предполагая, что как U, так и $\frac{\partial U}{\partial t}$ имеют порядок роста не выше e^{qt}, где $q > \alpha$ — некоторая постоянная величина. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы граничные функции $S(x, t)$; $T_j(y, t)$ ($j = 1, 2$) и интенсивность тепловыделения $w(x, y, t)$ удовлетворяли этому условию и, вместе с тем, чтобы начальное распределение $f(x, y)$ было ограниченным.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1), получим

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} - 2\alpha_1 \frac{\partial U^*}{\partial x} - 2\alpha_2 \frac{\partial U^*}{\partial y} - \frac{p - \alpha}{a} U^* =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} w^*(x, y, p) - \frac{f(x, y)}{a}. \qquad (3)$$

Здесь

$$U^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x, y, t)\, dt;$$

$$w^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} w(x, y, t)\, dt; \qquad (4)$$

$$\operatorname{Re} p = \beta > q; \qquad \alpha_1 = \frac{v_x}{2a}; \qquad \alpha_2 = \frac{v_y}{2a}.$$

Рассмотрим далее систему функций $\{\eta_k(y)\}$:

$$\eta_k(y) = \frac{e^{\alpha_2 y}}{N_k}\left(\cos\gamma_k y + \frac{h_2 - \alpha_2}{\gamma_k}\sin\gamma_k y\right), \qquad (5)$$

где

$$N_k = \frac{1}{\gamma_k}\left\{\frac{[\gamma_k^2 + (h_2 - \alpha_2)^2]d}{2} + \frac{(h_2 + h_3)[\gamma_k^2 + (h_2 - \alpha_2)(h_3 + \alpha_2)]}{2[\gamma_k^2 + (h_3 + \alpha_2)^2]}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

удовлетворяющих уравнению

$$\eta_k''(y) - 2\alpha_2\eta_k'(y) + (\gamma_k^2 + \alpha_2^2)\eta_k(y) = 0 \qquad (6)$$

и граничным условиям

$$-\eta_k'(0) + h_2\eta_k(0) = \eta_k'(d) + h_3\eta_k(d) = 0, \qquad (7)$$

причем собственные числа γ_k являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_k d = \frac{(h_2 + h_3)\gamma_k}{\gamma_k^2 - (h_2 - \alpha_2)(h_3 + \alpha_2)}. \qquad (8)$$

Функции $\eta_k(y)$, ортогональные и нормированные с весом $e^{-2\alpha_2 y}$, составляют, одновременно с функциями $\gamma_k \cos \gamma_k y + (h_2 - \alpha_2) \sin \gamma_k y$, полную в $(0, d)$ систему. Представим функцию $U^*(x, y, p)$ в виде ряда по $\eta_k(y)$:

$$U^*(x, y, p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, p)\, \eta_k(y). \tag{9}$$

Здесь $f_k(x, p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} U^*(x, y, p)\, \eta_k(y)\, dy$. Умножив обе части уравнения (3) на $e^{-2\alpha_2 y} \eta_k(y)$ и проинтегрировав от 0 до d, будем иметь

$$f_k''(x, p) - 2\alpha_1 f_k'(x, p) - \left(\gamma_k^2 + \alpha_2^2 + \frac{p - \alpha}{a}\right) f_k(x, p) = -w_k(x, p), \tag{10}$$

где

$$w_k(x, p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} \left[\frac{1}{\lambda} w^*(x, y, p) + \frac{1}{a} L(x, y)\right] \eta_k(y)\, dy +$$

$$+ h_2 \eta_k(0) S_0^*(x, p) + h_3 \eta_k(d)\, e^{-2\alpha_2 d} S_1^*(x, p). \tag{11}$$

Решая уравнение (10) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям, получим

$$f_k(x, p) = \frac{e^{\alpha_1 x}}{G_{k,p}} \Big\{ [\delta_{k,p} \operatorname{ch} \delta_{k,p} x + (h_0 - \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k,p} x] \times$$

$$\times \Big[h_1 T_k^{(1)}(p) + \frac{1}{\delta_{k,p}} \int_x^b e^{-\alpha_1 x_1} w_k(x_1, p) (\delta_{k,p} \operatorname{ch} \delta_{k,p}(b - x_1) +$$

$$+ (h_1 + \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k,p}(b - x_1))\, dx_1 \Big] + [\delta_{k,p} \operatorname{ch} \delta_{k,p}(b - x) +$$

$$+ (h_1 + \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k,p}(b - x)] \Big[h_0 T_k^{(0)}(p) +$$

$$+ \frac{1}{\delta_{k,p}} \int_0^x e^{-\alpha_1 x_1} w_k(x_1, p) (\delta_{k,p} \operatorname{ch} \delta_{k,p} x_1 + (h_0 - \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k,p} x_1)\, dx_1 \Big] \Big\}. \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\delta_{k,p} = \sqrt{\gamma_k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{p - \alpha}{a}}, \quad T_k^{(i)}(p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} T_i^*(y, p)\, \eta_k(y)\, dy; \tag{13}$$

$$G_{k,p} = [\delta_{k,p}^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)] \operatorname{sh} \delta_{k,p} b + (h_0 + h_1) \delta_{k,p} \operatorname{ch} \delta_{k,p} b$$

Ниже нам понадобятся нули $G_{k,p}$. Легко видеть, что уравнение

$$[\delta^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)] \operatorname{sh} \delta b + (h_0 + h_1) \delta \operatorname{ch} \delta b = 0 \tag{14}$$

не имеет комплексных корней. В самом деле, пусть δ_j корень уравнения (14). Тогда, очевидно, и $\overline{\delta}_j$ является корнем (14). Рассмотрим интеграл

$$(\delta_j^2 - \overline{\delta}_j^2)\int\limits_0^b \psi_j(x)\overline{\psi}_j(x)\,dx, \tag{15}$$

где $\psi_j(x) = \delta_j \operatorname{ch} \delta_j x + (h_0 - a_1)\operatorname{sh} \delta_j x$. Функция $\psi_j(x)$ удовлетворяет уравнению $\psi_j'' - \delta_j^2\psi_j = 0$ и условиям $-\psi_j'(0) + (h_0 - a_1)\psi_j(0) = \psi_j'(b) + (h_1 + a_1)\psi_j(b) = 0$. Интегрируя (15) по частям и учитывая уравнение и граничные условия для $\psi_j(x)$, получим $(\delta^2 - \overline{\delta}_j^2)\int\limits_0^b \psi_j(x)\overline{\psi}_j(x)\,dx = 0$, откуда имеем $\delta_j^2 = \overline{\delta}_j^2$, так как под интегралом стоит положительная функция. Уравнение (14) имеет бесконечное множество простых мнимых корней $\delta_j = i\mu_j$, расположенных в границах [3] $j\pi < \mu_j b < j\pi + \dfrac{(h_0 + h_1)b}{j\pi}$. Кроме того, в случае, если $(a_1 - h_0)(a_1 + h_1) > \dfrac{h_0 + h_1}{b}$, уравнение (14) имеет простой действительный корень $\operatorname{th}\delta b = \dfrac{\delta(h_0 + h_1)}{(a_1 - h_0)(a_1 + h_1) - \delta^2}$, а при $(a_1 - h_0)(a_1 + h_1)b = h_0 + h_1$ — кратный корень в нуле.

Согласно теореме обращения [4] переход от преобразованной функции к оригиналу осуществляется посредством обратного преобразования

$$U(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, p)\,\eta_k(y)\,dp, \tag{16}$$

где $\sigma > \beta$. Полюса $-(\gamma_k^2 + \mu_j^2 + a_1^2 + a^2)a + \alpha$ подынтегральной функции расположены все на отрицательной действительной оси. Рассмотрим в плоскости p односвязную область Q_l, ограниченную контуром l, не проходящим ни через один полюс и составленным из отрезков прямых $\operatorname{Re} p = \sigma\,(-R_n \leqslant \operatorname{Im} p \leqslant R_n)$, $\operatorname{Im} p = \pm R_n$ $(0 < \operatorname{Re} p \leqslant \sigma)$, дуг окружности $|p| = R_n$, двубережных разрезов вдоль отрицательной оси оси и дуг окружностей вокруг полюсов функции $f_k(x, p)$ (см. рисунок).

Функция $f_k(x, p)$ регулярна в замкнутой области $\overline{Q}_l$, и согласно теореме Коши [5] интеграл, взятый по контуру l, равен нулю. Согласно лемме Жордана интеграл по дугам окружности $|p| = R_n$ так же, как интегралы по отрезкам BC и $B'C'$, стремится к нулю при неограниченном возрастании R_n. Применяя теорию вычетов и воспользовавшись теоремой Бореля о свертке [4], для функции $U(x, y, t)$ получим выражение

$$
U(x,\ y,\ t) = 2abe^{a_1 x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M_{jk}\, \eta_k(y)\, e^{-m_{j,k} t} \times
$$

$$
\times \Bigg\{ \int_0^d e^{-2a_2 y_1} \eta_k(y_1) \int_0^t [h_1 \xi_j(x)\, T_1(y_1,\ t_1) + h_0 \zeta_j(x)\, T_0(y_1,\ t_1)] \times
$$

$$
\times e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 + \frac{\xi_j(x)}{\mu_j} \int_x^b e^{-a_1 x_1} \zeta_j(x_1) \Bigg[\int_0^t (h_2 \eta_k(0) S_0(x_1,\ t_1) +
$$

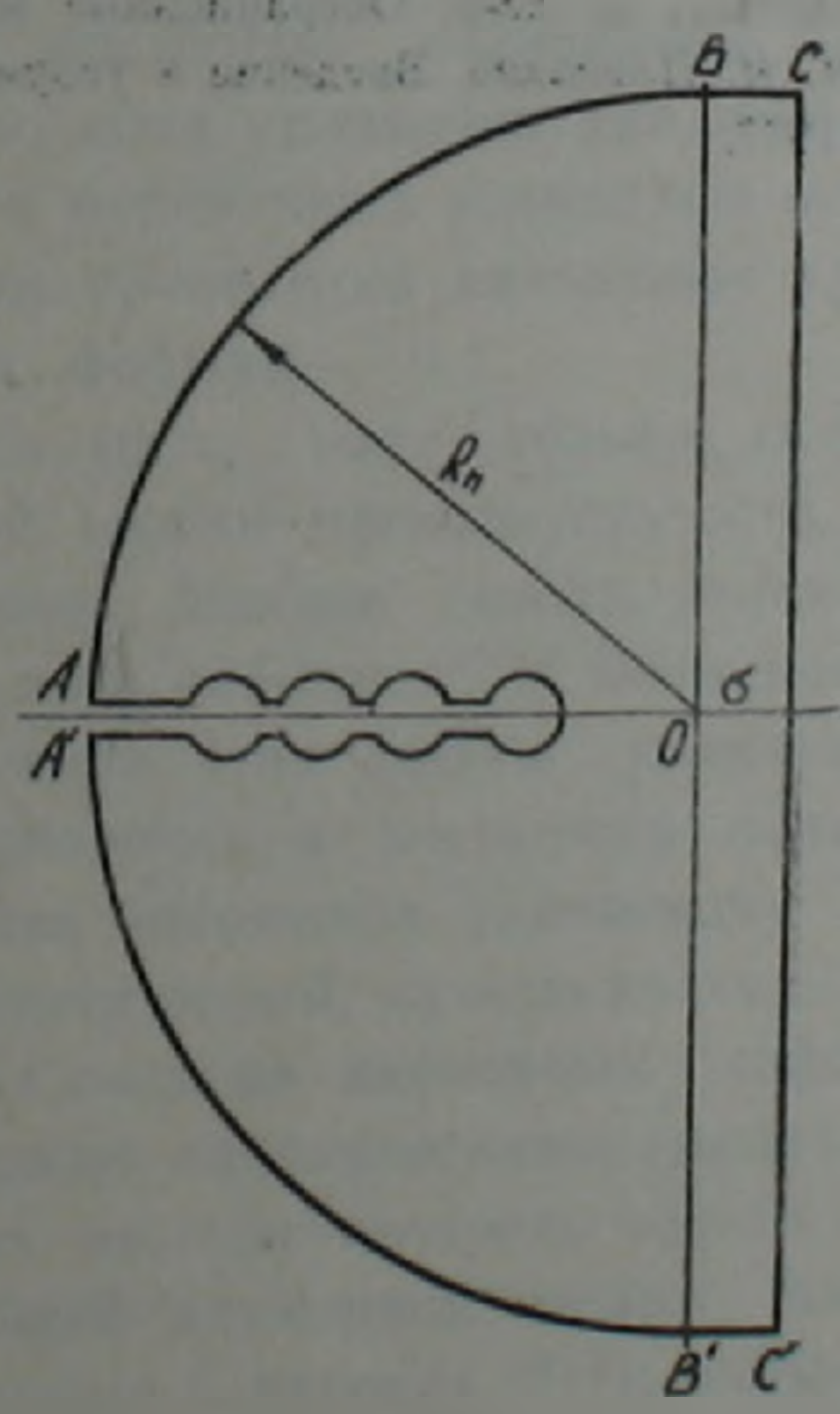
$$
+ h_3 \eta_k(d)\, e^{-2a_2 d} S_1(x_1,\ t_1))\, e^{m_{j,k} t_1} dt_1 + \frac{1}{a} \int_0^d e^{-2a_2 y_1} \eta_k(y_1)\, L(x_1,\ y_1)\, dy_1 +
$$

$$
+ \frac{1}{\lambda} \int_0^d e^{-2a_2 y_1} \eta_k(y_1) \int_0^t w(x_1,\ y_1,\ t_1)\, e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 \Bigg] dx_1 +
$$

$$
+ \frac{\zeta_j(x)}{\mu_j} \int_0^x e^{-a_1 x_1} \xi_j(x_1) \Bigg[\int_0^t (h_2 \eta_k(0) S_0(x_1,\ t_1) +
$$

$$
+ h_3 \eta_k(d)\, e^{-2a_2 d} S_1(x_1,\ t_1))\, e^{m_{j,k} t_1} dt_1 + \frac{1}{a} \int_0^d e^{-2a_2 y_1} L(x_1,\ y_1)\, \eta_k(y_1)\, dy_1 +
$$

$$
+ \frac{1}{\lambda} \int_0^d e^{-2a_2 y_1} \eta_k(y_1) \int_0^t w(x_1,\ y_1,\ t_1)\, e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 \Bigg] dx_1 \Bigg\}. \ ^{*} \qquad (17)
$$



Рис

* Если $(a_1 - h_0)(a_1 + h_0)\, b = h_0 + h_1$, то в ряду (17) добавляется выражение, получаемое при кратном корне уравнения (14).

Здесь введены следующие обозначения

$$M_j = \frac{(-1)^j \mu_j^2 \sqrt{[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)^2][\mu_j^2 + (h_1 + \alpha_1)^2]}}{[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)^2][\mu_j^2 + (h_1 + \alpha_1)^2] b + (h_0 + h_1)[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)]};$$

$$m_{jk} = a(\mu_j^2 + \gamma_k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \alpha; \qquad \xi_j(x) = \cos \mu_j x + \frac{h_0 - \alpha_1}{\mu_j} \sin \mu_j x;$$

$$\zeta_j(x) = \cos \mu_j (b - x) + \frac{h_1 + \alpha_1}{\mu_j} \sin \mu_j (b - x).$$

Институт математики Академии наук Армении

Ռ. Ա. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Հաստատուն արագությամբ շարժվող ուղղանկյունաձև կտրվածքով պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հոսքը

Հոդվածում դիտարկվում է ուղղանկյունաձև կտրվածք ունեցող հաստատուն արագությամբ շարժվող պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հոսքը, երբ կողերի վրա տեղի է ունենում ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер.* Теплопроводность твердых тел. Наука, М., 1964. [2] *H. Jeffreys.* The Earth. Cambridge, 1976. [3] *Р. Минасян.* ДАН АрмССР, т. 28, № 4 с. 160—161 (1959). [4] *Х. Карслоу, Д. Егер.* Операционные методы в прикладной математике. ИЛ. М., 1948 [5] *И. И. Привалов.* Введение в теорию функций комплексного переменного. Наука, М., 1977.