ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

А. В. Арутюнян

О характеристике анизотропных пространств голоморфных в полидиске функций в терминах производных

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 27/XI 1990)

1°. Пусть U^n — единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{T}^n$ — его остов. Символом S обозначим множество измеримых неотрицательных на $(0, 1)$ функций ω, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω, причем m_ω, $q_\omega \in (0, 1)$, такие, что $m_\omega \leq \dfrac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ при всех $r \in (0, 1)$, $\lambda \in [q_\omega, 1]$. Функции типа S изучены в [1]. Пусть $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ класс измеримых по Лебегу в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)} = \Big(\int_{U^n} |f(\xi_1, \ldots, \xi_n)|^p \omega_1(1 - |\xi_1|) \cdots$$

$$\cdots \omega_n(1 - |\xi_n|) dm_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\Big)^{1/p} < +\infty,$$

$m_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — $2n$-мерная мера Лебега на U^n.

Далее, через $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ обозначим класс голоморфных в U^n функций f, для которых $f \in L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, в котором вводится аналогичная норма. Отметим, что при $n = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ эти пространства впервые были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна [2] и [3]. В работе существенную роль играют интегральные представления этих классов, найденные в работах [2, 3].

Цель настоящей заметки — дать полную характеристику пространства $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в терминах производных.

В работе [4] установлена следующая

Теорема А. *Пусть $1 \leq p < +\infty$. Тогда $f \in H^p(1, 1)$ тогда и только тогда, когда функции*

$$(1 - |z_1|^2)\frac{\partial f(z_1, 0)}{\partial z_1}; \qquad (1 - |z_2|^2)\frac{\partial f(0, z_2)}{\partial z_2},$$

$$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)\frac{\partial^2 f(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}$$

принадлежат L^p.

Отметим, что в работе ([4]) установлен также аналог этой теоремы и для случая шара в C^n. Фактически мы обобщаем теорему А по двум направлениям. Во-первых, докажем, что теорема верна для любого $0<p<+\infty$.

Во-вторых, берем производные любого порядка и рассматриваем анизотропные пространства $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

2°. Для формулировки основного результата заметки возьмем мультииндекс $k=(k_1, \ldots, k_m)$, $k_i \geq 1$, $i=1, 2, \ldots, n$. Введем теперь следующие обозначения. Пусть s_j неотрицательное целое число, $1 \leq j \leq n$, r_j целое число, удовлетворяющее условию $-2^{s_j} \leq r_j \leq 2^{s_j}-1$.

$$\Delta_{s_j, r_j} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ z_j;\ 1-\frac{1}{2^{s_j}} \leq |z_j| < 1-\frac{1}{2^{s_j+1}};$$

$$\frac{\pi r_j}{2^{s_j}} \leq \arg z_j < \frac{\pi (r_j+1)}{2^{s_j}} \Big\};$$

$$\Delta_{s_1 \ldots s_n, r_1 \ldots r_n} = \Delta_{s, r} = \Delta_{s_1, r_1} \times \ldots \times \Delta_{s_n, r_n}.$$

Подобные свойства $\Delta_{s,r}$ приведены в ([5]). Введем в рассмотрение также функцию $\chi_\tau(z) = \dfrac{1}{(1-|z_i|)^{1/pq}}$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $z=(z_1, \ldots, z_n) \in U^n$. Основным результатом заметки является

Теорема. *Пусть f голоморфная в U^n функция, $0<p<+\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *функция f принадлежит классу $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$;*

2) *каждая функция из последовательности*

$$(1-|z_i|^2)^{k_i} \frac{\partial^{k_i} f(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i^{k_i}} \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$(1-|z_i|^2)^{k_i}(1-|z_j|^2)^{k_j} \frac{\partial^{k_i+k_j} f(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, z_j, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i^{k_i} \partial z_j^{k_j}} \qquad (1)$$

$$1 \leq i \leq j \leq n.$$

. . . .

$$(1-|z_1|^2)^{k_1} \ldots (1-|z_n|^2)^{k_n} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}$$

принадлежит $L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* $f \in H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$, *то функция* $f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)$ *принадлежит классу* $H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $l = 1, 2, \dots, n$, *при этом имеет место оценка*

$$\|f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)}.$$

Доказательство. Используя субгармоничность функции $|f(z_1, \dots, z_n)|^p$, получаем

$$|f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p \leqslant \int\limits_{T^{n-l+1}} |f(z_1, \dots, z_l, \rho_{l+1}\xi_{l+1}, \dots, \rho_n\xi_n)|^p \times$$

$$\times\, dm_{n-l+1}(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n) \tag{2}$$

$$\rho_j > 0, \quad j = l+1, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\rho_{l+1}\omega_{l+1}(1-\rho_{l+1}) \dots \rho_n\omega_n(1-\rho_n)$ и положим $z_i = \rho_i\xi_i$, $i = l+1, \dots, n$. Теперь, проинтегрировав неравенство (2), будем иметь

$$\mathrm{const}\,|f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p < \int\limits_{U^{n-l+1}} |f(z_1, \dots, z_n)|^p \times$$

$$\times\, \omega_{l+1}(1-|z_{l+1}|) \dots \omega_n(1-|z_n|)\, dm_{2(n-l+1)}(z_{l+1}, \dots, z_n).$$

Умножим обе части полученного неравенства на $\omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)$ и проинтегрируем. В итоге получим

$$\int\limits_{U^l} |f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)\, dm_{2l}(z_1, \dots, z_l) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int\limits_{U^n} |f(z_1, \dots, z_n)|^p \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_n(1-|z_n|)\, dm_{2n}(z_1, \dots, z_n) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем для $m = (m_1, \dots, m_n) \in Z_+^n$ обозначим через

$$D_m = (\xi, z) = \frac{m+1}{\pi^n} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi}z)^{m+2}} =$$

$$= \frac{(m_1+1)\dots(m_n+1)}{\pi^n} \frac{(1-|\xi_1|^2)^{m_1} \dots (1-|\xi_n|^2)^{m_n}}{(1-\bar{\xi}_1 z_1)^{m_1+2} \dots (1-\bar{\xi}_n z_n)^{m_n+2}}$$

многомерное ядро М. М. Джрбашяна (см. ([2, 3])).

$$\delta_m(\xi, z) = \frac{(1-(1-\bar{\xi}_1 z_1)^{m_1+1})\dots(1-(1-\bar{\xi}_n z_n)^{m_n+1})}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n},$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad z = z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

Пусть $F(z_1, \dots, z_n)$ голоморфная в U^n функция. Тогда по теореме М. М. Джрбашяна (см. ([2, 3])) она допускает следующее представление

$$F(z_1, \dots, z_n) = \int\limits_{U^n} D_m(\xi, z) F(\xi_1, \dots, \xi_n)\, dm_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_n) \qquad (3)$$

Будем предполагать, что m_i, $i = 1, 2, \dots, n$ достаточно большие числа. Имеет место следующее утверждение

Лемма 2. *Если*

$$(1-|z_1|^2)^{k_1} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l} \frac{\partial^l F(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1 \dots \partial z_l} \in L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)$$

$k_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \dots, l$, $0 < p < +\infty$, *то функция*

$$G(z_1, \dots, z_l) = (1-|z_1|^2)^{k_1-1} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l-1} \int\limits_{U^l} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi} z)^{m+1}} \times$$

$$\times \delta_m(\xi, z) \frac{\partial^l F(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_l} dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l)$$

тоже принадлежит классу $L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $l = 1, 2, \dots, n$. *При этом*

$$\|G\|_{L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} < \mathrm{const} \left\| (1-|z_1|^2)^{k_1} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^l F(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1, \dots, \partial z_l} \right\|_{L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)}.$$

Лемма 3. *Если* $(1-|z_i|^2)^{k_i} \dfrac{\partial F(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)}{\partial z_i} \in L^p(\omega_i)$,

$i = 1, 2, \dots, n$, $0 < p < +\infty$, *то* $(1-|z_i|^2)^{k_i-1} F(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)$ *тоже принадлежит* $L^p(\omega_i)$. *При этом справедлива оценка*

$$\|(1-|z_i|^2)^{k_i-1} F(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)\|_{L^p(\omega_i)} <$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left\| (1-|z_i|^2)^{k_i} \frac{\partial F(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)}{\partial z_i} \right\|_{L^p(\omega_i)}.$$

Теперь, используя леммы 1—3, наметим ход доказательства теоремы. Сначала докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Для этого достаточно доказать, что функция

$$(1-|z_1|^2)^{k_1}\dots(1-|z_l|^2)^{k_l}\,\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}$$

принадлежит классу $L^p(\omega_1,\dots,\omega_l)$, $l=1,2,\dots,n$. Действительно, любую функцию из совокупности (1) можно переписать в указанном виде, изменяя нумерацию переменных.

Используя (3), получим

$$f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)=\frac{m+1}{\pi^l}\int\limits_{U^l}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar\xi z)^{m+2}}\times$$

$$\times f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)\,dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l),$$

дифференцируя указанное равенство, будем иметь

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}=$$

$$=C(m,\pi,k)\int\limits_{U^l}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar\xi z)^{m+k+2}}f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)\,dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l).$$

Сначала предположим, что $0<p\leqslant 1$. Тогда

$$\int\limits_{U^l}(1-|z_1|^2)^{k_1p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_lp}\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}\right|^p\times$$

$$\times\,\omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)\,dm_{2l}(z_1,\dots,z_l)\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\sum_{s_1\dots s_l=0}^{\infty}\ \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\dots\sum_{r_l=-2^{s_l}}^{2^{s_l}-1}\ \max_{\xi\in\bar\Delta_{s,r}}\times$$

$$\times\left\{(1-|\xi_1|^2)^{m_1p}\dots(1-|\xi_l|^2)^{m_lp}\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)}{\partial\xi_1^{k_1}\dots\partial\xi_l^{k_l}}\right|^p\times\right.$$

$$\times\int\limits_{U^l}\omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)(1-|z_1|^2)^{k_1p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_lp}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Delta_{s,r}}\frac{dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l)}{|1-\bar\xi z|^{m+k+l}}\right)^p dm_{2l}(z_1,\dots,z_l).$$

Положим

$$J_{s,r} = \int\limits_{U^l} \omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)(1-|z_1|)^{k_1 p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_l p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Delta_{s,r}} \frac{dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l)}{|1-\bar{\xi}z|^{m+k+2}}\right)^p dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l),$$

тогда, учитывая лемму 2 из (⁵), получим оценку

$$J_{s,r} \leqslant \frac{\omega_1(1-\rho_{s_1+1})\dots\omega_l(1-\rho_{s_l+1})}{(1-\rho_{s_1+1})^{m_1 p-2}\dots(1-\rho_{s_l+1})^{m_l p+2}};$$

$$|\xi_i| = \rho_i; \quad \rho_{s_i} \leqslant \rho_i \leqslant \rho_{s_i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

Теперь, используя лемму 4 из (⁵), получим

$$\int\limits_{U^l}(1-|z_1|^2)^{k_1 p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_l p}\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}\right|^p \times$$

$$\omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)\,dm_{2l}(z_1,\dots,z_l) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{s_1\dots s_l=0}^{\infty} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_l} \max_{\xi\in\bar{\Delta}_{s,r}} \{(1-|\xi_1|^2)^2\dots(1-|\xi_l|^2)^2 \times$$

$$\times\,\omega_1(1-|\xi_1|)\dots\omega_l(1-|\xi_l|)|f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)|^p\} \times$$

$$< \text{const}\int\limits_{U^l} |f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)|^p\omega_1(1-|\xi_1|)\dots\omega_l(1-|\xi_l|) \times$$

$$\times\, dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l) \leqslant \text{const}\|f\|^p_{H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)} < +\infty$$

последняя оценка вытекает из леммы 1. Перейдем теперь к случаю $p > 1$. Имея в виду, что γ удовлетворяет условиям леммы 2 из (⁵), применив неравенство Гельдера, получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}\right|^p \leqslant \int\limits_{U^l} \frac{|D_{m+k}(\xi,z)|}{\gamma_1^p(\xi)} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-|\xi|^2)^{\gamma}}|f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)|^p\,dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l) \times$$

$$\times \left(\int_{U^l} |D_{m+k}(\xi, z)| \chi_\gamma^q(\xi)\, dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l) \right)^{p/q} <$$

$$< \chi_\gamma^p(z) \int_{U^l} \frac{|D_{m+k}(\xi, z)| \cdot |f(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)|^p}{\chi_\gamma^p(\xi) \quad (1-|\xi|^2)^k} dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l).$$

Здесь мы снова воспользовались леммой 2 из ([5]). Умножим обе части полученного неравенства на $(1-|z_1|^2)^{k_1 p} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l p} \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)$ и проинтегрируем. В итоге получим

$$\left\| (1-|z_1|^2)^{k_1} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_l^{k_l}} \right\|_{L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} <$$

$$< \mathrm{const} \| f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0) \|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} <$$

$$\leqslant \mathrm{const} \| f \|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)} < +\infty.$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Пусть все функции из (1) принадлежат классу $L^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Обозначим

$$F(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial^{k_1-1+\dots+k_n-1} f(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{k_1-1} \dots \partial z_n^{k_n-1}}.$$

Имеем

$$\frac{\partial^n F(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1, \dots, \partial z_n} = \int_{U^n} D_m(\xi, z) \frac{\partial^n F(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1, \dots, \partial \xi_n} dm_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Проинтегрировав необходимое число раз, получим

$$F(z_1, \dots, z_n) = F(0, \dots, 0) + F(z_1, 0, \dots, 0) + F(0, z_2, 0, \dots, 0) + \dots +$$

$$+ F(0, \dots, 0, z_{n-1}, z_n) + F(z_1, z_2, 0, \dots, 0) +$$

$$+ F(z_1, 0, z_3, 0, \dots, 0) + \dots + F(0, \dots, 0, z_{n-1}, z_n) + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{\pi^n} \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\xi z)^{m+1}} \partial_m(\xi, z) \frac{\partial^n F(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1, \dots, \xi_n} dm_{2n}(\zeta_1, \dots, \xi_n).$$

С помощью леммы 3 и метода математической индукции (относительно переменных) устанавливается, что функция

$$(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\dots(1-|z_n|^2)^{k_n-1}F(z_1,\dots,z_n)$$

принадлежит классу $L^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$. Далее, продолжая снижение порядка дифференцирования и используя интегральное представление (3), получим, что

$$f(z_1,\dots,z_n)=f(0,\dots,0)+f(z_1,0,\dots,0)+\dots+f(0,\dots,0,z_n)+$$

$$+f(z_1,z_2,0,\dots,0)+f(z_1,0,z_3,0,\dots,0)+\dots+$$

$$+f(0,\dots,0,z_{n-1},z_n)+\dots+\frac{(-1)^n}{\pi^n}\int\limits_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi}z)^{m+1}}\delta_m(\xi,z)\times$$

$$\times\frac{\partial^n f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_n}dm_{2n}(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Отсюда получаем, что $f(z_1,\dots,z_n)\in H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$.

Теорема доказана.

Работа выполнена под руководством Ф. А. Шамояна.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածությունների բնութագրումը ածանցյալների տերմիններով

Աշխատանքում տրվում է $H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ կշռային անիզոտրոպ տարածությունների լրիվ բնութագրումը ածանցյալների տերմիններով։ Ապացուցվում է, որ f ֆունկցիան $H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ դասից է, այն և միայն այն ժամանակ, երբ (1) հաջորդականության ֆունկցիաները պատկանում են $L^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ դասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Е. Сенета*, Правильно изменяющиеся функции, Наука, М., 1985. 2 *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945). 3 *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, Вып. 2, с. 3—30 (1948). 4 *Kehe Zhu*, Trans. of the American math. soc., v. [illegible], № 1, p. 253—2[illegible]7 (19[illegible]8). 5 *Ф. А. Шамоян*, Сибирский мат. журнал, т. 31, № 2, с. 195—215 (1990).