ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

С. С. Степанян

О свойствах тейлоровских коэффициентов функций класса $H_p(\alpha)$

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 26/XI 1990)

В монографиях, посвященных классам аналитических в единичном круге функций, важное место занимает введенный М. М. Джрбашяном [1, 2] класс $H_p(\alpha)$ ($p>0$, $\alpha>-1$), который является естественным обобщением известного класса H_p, введенного Риссом и Харди.

Целью настоящей работы является получение с помощью тейлоровских коэффициентов необходимых, достаточных условий принадлежности функций

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n, \quad |z|<1 \tag{1}$$

к классу $H_p(\alpha)$.

Аналогичные результаты для функций класса H_p получены Юнгом-Хаусдорфом [3], Харди и Литтлвудом [4].

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция* (1) *принадлежит классу* $H_p(\alpha)$ ($1\leq p<2$, $\alpha>-1$), *то сходится следующий ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{n^{\frac{1+\alpha}{p-1}}}<+\infty. \tag{2}$$

Теорему докажем для двух случаев:

а) $1<p<2$, б) $p=2$.

Пусть $f(z)\in H_p(\alpha)$ ($1<p<2$, $\alpha>-1$). Зафиксировав число ρ, $0<\rho<1$, вместо функции (1) рассмотрим функцию $f(\rho z)\in H_p$ ($p>0$), относительно которой, применяя теорему Юнга–Хаусдорфа, можно написать

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\rho^{\frac{np}{p-1}}\right]^{p-1}\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta, \quad 1<p<2. \tag{3}$$

Умножив обе части неравенства (3) на выражение $(1-\rho^2)^\alpha$ и проинтегрировав в промежутке $[0, 1-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<1$, $\alpha>-1$, получим

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon}\left[\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\rho^{\frac{np}{p-1}}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right]^{p-1}\rho d\rho \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|_p^p d\rho d\theta. \quad (4)$$

Учитывая, что $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(1<p<2,\ \alpha>-1)$, перейдем к пределу в неравенстве (4) при $\varepsilon\to 0$. Получим

$$\int\limits_0^1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha\right]^{\frac{1}{p-1}}\right\}^{p-1}dx\leqslant C_{p,\alpha}, \quad (5)$$

где $x=\rho^2$, $1<p<2$, $\alpha>-1$

$$C_{p,\alpha}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta. \quad (6)$$

Принимая во внимание неравенство 201 ([5]) и предполагая $k=\frac{1}{p-1}$, $0<p-1<1$, $f_n(x)=|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha$, из неравенства (5) имеем, что

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int\limits_0^1|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha dx\right]^{\frac{1}{p-1}}\right\}^{p-1}\leqslant C_{p,\alpha}. \quad (7)$$

Воспользовавшись интегралами Эйлера, можем написать, что

$$\int\limits_0^1 x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha dx=B\left(\frac{np}{2}+1,\ 1+\alpha\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}. \quad (8)$$

Учитывая асимптотическое разложение функции Γ ([6], с. 124) и применяя соотношения (7) и (8), будем иметь, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{n^{\frac{1+\alpha}{p-1}}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

одновременно сходятся.

Доказательство теоремы при $p=2$ следует из следующего разложения [3]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+2+n)}|a_n|^2=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{9}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если для функции* (1) *ряд* (2) *сходится, то* $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(2<p<\infty,\ \alpha>-1)$.

Для доказательства теоремы снова фиксируем ρ, $0<\rho<1$, и, применяя теорему Юнга—Хаусдорфа в случае, когда $p>2$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\rho^{\frac{np}{p-1}}\right\}^{p-1}. \tag{10}$$

Из неравенства (10) получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho\,d\rho\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}\left|\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}x^{\frac{np}{2(p-1)}}(1-x)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right|^{p-1}dx. \tag{11}$$

Используя неравенство 200 ([5]) при $k=p-1>1$, заключаем, что

$$\left\{\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}x^{\frac{np}{2(p-1)}}(1-x)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right|^{p-1}dx\right\}^{\frac{1}{p-1}}<$$

$$<\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1\left||a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^{\alpha}\right|dx\right\}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{12}$$

Из соотношения (8) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1\left||a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^{\alpha}\right|dx\right\}^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+2+\alpha\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{13}$$

Перейдем к пределу в неравенстве (11), когда $\varepsilon\to0$. Учитывая соотношения (12) и (13), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\,|f(\rho e^{i\theta})|^p\,\rho\,d\rho\,d\theta \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+2+\alpha\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ряд (2) будет сходиться одновременно с рядом, полученным в правой части последнего неравенства. Таким образом, теорема доказана для случая $2<p<\infty$.

Теорема 3. *Если функция* (1) *принадлежит классу* $H_p(\alpha)$ $(0<p\le 2,\ \alpha>-1)$, *то сходится следующий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^p}{n^{\alpha+3-p}}<+\infty. \tag{14}$$

Теорема 4. *Чтобы функция* (1) *принадлежала классу* $H_p(\alpha)$ $(2\le p<\infty,\ \alpha>-1)$, *достаточно, чтобы сходился ряд* (14).

Доказательства этих теорем проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 1 и 2.

Отметим только, что при доказательстве теоремы 3 мы воспользуемся теоремой 6·2 ([4]), а при доказательстве теоремы 4 надо воспользоваться теоремой 6·3 ([4]).

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Օ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

$H_p(\alpha)$ դասի ֆունկցիաների Թեյլորյան գործակիցների հատկությունների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մուծված $H_p(\alpha)$ ($p>0$, $\alpha>-1$) դասի ֆունկցիաների Թեյլորյան գործակիցների որոշ հատկությունները։ Թեյլորյան գործակիցների միջոցով տրված են միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $H_p(\alpha)$ դասին պատկանելու անհրաժեշտ, բավարար, ինչպես նաև, անհրաժեշտ ու բավարար պայմանների մասին։

Ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Ռիսի-Խարդիի H_p դասին ֆունկցիաների պատկանելության վերաբերյալ Յունգ-Հաուսդորֆի, Խարդի-Լիթլվուդի դասական թեորեմների անալոգները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945). [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, с. 3—48, (1948). [3] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950. [4] *Duren*, Theory of H^p spaces, 1970, New York and London. [5] *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа*, Неравенства, М., 1934. [6] *А. О. Гельфонд*, Исчисление конечных разностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.