ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Интегральные представления и приближения функций в трубчатых областях над полиэдрами

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Как известно, класс Харди $H^2\{\mathrm{Re}\, z>0\}$ состоит из голоморфных в правой полуплоскости функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty. \tag{1}$$

Классический результат Н. Винера и Р. Пэли [1] утверждает, что $H^2\{\mathrm{Re}\, z>0\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z)=\int_0^{+\infty}e^{-z\cdot t}\cdot\varphi(t)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\, z>0, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)\in L^2(0,+\infty)$ произвольна.

В дальнейшем в работах ряда авторов были получены различные обобщения этого результата, не выходящие, однако, за рамки идей и методов монографии [1]. А между тем в исследованиях М. М. Джрбашяна, подытоженных в его монографии [2], была развита теория гармонического анализа и интегральных преобразований в комплексной области, и на ее основе в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] и в самой монографии [2] были получены существенно новые интегральные представления типа Винера—Пэли посредством ядер Миттаг-Лефлера $E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(\mu+k/\rho)$.

В теории функций многих комплексных переменных также проводились исследования с целью получения если не обобщений, то хотя бы многомерных аналогов теоремы Винера—Пэли (см. работу С. Бохнера [4]). В этой связи примечательна работа С. Г. Гиндикина [5], где впервые была поставлена и решена задача несколько иного рода: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли (и на их основе построить воспроизводящие ядра) для классов голоморфных в областях Зигеля $D \subset \mathbf{C}^{n+m}$ ($n \geq 1$, $m \geq 0$) функций, квадратично интегрируемых по всей области D.

2. Введем некоторые необходимые в дальнейшем обозначения. Произвольное $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ может быть записано как $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = x + iy$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ и $z_k = x_k + iy_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Если $z = (z_1, \ldots, z_n) = x + iy \in \mathbf{C}^n$, то полагаем $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = x - iy \in \mathbf{C}^n$.

Скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$ вводится стандартным образом:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{w}_k, \tag{3}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{C}^n$.

Далее, пространство $\mathbf{R}^n$ будет отождествляться с вполне вещественным подпространством в $\mathbf{C}^n$.

Пусть B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — произвольная непрерывная функция. При $0 < p$, $s < +\infty$ через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ обозначим пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{R}^n,\ y \in B\}$ функций $f(z) \equiv f(x+iy)$ с конечной „нормой"

$$M^p_{s,\gamma}(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_B \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty. \tag{4}$$

Замечание 1. При $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, пространства $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ и „нормы" $M^p_{s,\gamma}(f)$ будут обозначаться соответственно через $H^p_s(T_B)$ и $M^p_s(f)$.

В работах Т. Г. Генчева ([6]), М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна ([7]) содержатся разнообразные результаты, относящиеся к интегральным представлениям типа Винера—Пэли для классов типа $H^p_s(T_B)$. Случай, когда весовая функция $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, рассмотрен с различных точек зрения в работах ([8, 9]), а также в некоторых других работах автора, находящихся пока в печати.

3. Всюду дальше P будет обозначать открытый полиэдр (т. е. выпуклый многогранник без учета границы) в пространстве $\mathbf{R}^n$. И пусть $\{a_m\}_1^M$ суть множество всех вершин полиэдра P. Нетрудно заметить, что справедливо представление вида

$$P = \bigcap_{m=1}^{M} Y_m,$$

где Y_m $(1 \leq m \leq M)$ являются многогранными углами в пространстве $\mathbf{R}^n$ с вершинами в точках a_m. Полагая затем $V_m = Y_m - a_m$ $(1 \leq m \leq M)$, отметим, что и V_m $(1 \leq m \leq M)$ являются многогранными углами в $\mathbf{R}^n$, но уже с вершинами в начале координат.

Определение. Однозначно определяемую полиэдром $P \subset \mathbf{R}^n$ совокупность $(a_m, V_m)_1^M$ назовем набором конструктивных данных для P.

Далее, при $1 \leq m \leq M$ положим

$$V_m^* = \{v \in \mathbf{R}^n : \langle v, y \rangle \geq 0, \ \forall y \in V_m\}. \tag{5}$$

В работе установлен следующий вспомогательный, но весьма важный факт:

Теорема 1. *Пусть P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$. Тогда:*

1°. *Множества* $\operatorname{Int} V_m^*$, $1 \leq m \leq M$, *попарно не пересекаются*

2°. $\mathbf{R}^n = \bigcup_{m=1}^{M} V_m^*$.

Замечание 2. В работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина ([10]) также рассматривались определенные разбиения пространства $\mathbf{R}^n$, ассоциированные с определенными полиэдрами, однако в связи с задачами совершенно иного рода.

Сформулированный результат является эффективным средством при установлении ряда важных оценок, которые в конечном счете приводят к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in P$ — произвольная непрерывная положительная функция класса $L^1(P)$ и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле*

$$\Phi(z, w) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, t\rangle}}{\gamma_P^*(2t)}\, dt, \quad z, w \in T_P, \tag{6}$$

где

$$\gamma_P^*(t) = \int_P e^{-\langle t, y\rangle} \gamma(y)\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

Тогда $\Phi(z, w)$ голоморфно по z, антиголоморфно по w, и любая функция f класса $H_{s,\gamma}^p(T_P)$, где $1 \leq p \leq 2$, $1/p \leq s < +\infty$, допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_P} f(w)\, \Phi(z, w)\, \gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in T_P \ (w = u + iv), \tag{8}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при всех $z \in T_P$.

4. Пусть вновь P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$, и при этом, как обычно, $Y_m = a_m + V_m$ $(1 \leq m \leq M)$. Нетрудно проверить, что если $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$ и функции $f_m \in H_s^p(T_{Y_m})$ $(1 \leq m \leq M)$, то функция

$$f(z) = \sum_1^M f_m(z), \quad z \in T_P, \tag{9}$$

принадлежит классу $H_s^p(T_P)$. Возникает естественный вопрос: всякая ли функция $f\in H_s^p(T_P)$ допускает разложение вида (9) с функциями $f_m\in H_s^p(T_{Y_m})$, $1\le m\le M$? Мы устанавливаем, что при $p=2$, $0<s<+\infty$ это „почти" так. Более точно, справедлив следующий результат:

Теорема 3. *Пусть $P\subset\mathbb{R}^n$ — полиэдр с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$, $Y_m=a_m+V_m$ $(1\le m\le M)$ и $0<s<+\infty$. Если функция $f\in H_s^2(T_P)$, то для любого $\varepsilon>0$ существуют функции $f_m\in H_s^2(T_{Y_m})$ $(1\le m\le M)$, такие, что*

$$M_s^2\left(f-\sum_1^M f_m\right)=\int_P\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x+iy)-\sum_1^M f_m(x+iy)\right|^2 dx\right\}^s dy<\varepsilon. \quad (10)$$

Замечание 3. Теорема 3 является многомерным аналогом следующего результата (см. например, работу [11]): пусть $-\infty<a<b<+\infty$, тогда любую функцию $f\in H_1^2\{a<\operatorname{Im} z<b\}$ со сколь угодно большой точностью можно приблизить по „норме" пространства $H_1^2\{a<\operatorname{Im} z<b\}$ суммой вида f_1+f_2, где $f_1\in H_1^2\{a<\operatorname{Im} z<+\infty\}$ и $f_2\in H_1^2\{-\infty<\operatorname{Im} z<b\}$.

5. Напомним, что если B — область в $\mathbb{R}^n$ и $0<p<+\infty$, то $H^p(T_B)$ обозначает пространство Харди голоморфных в трубчатой области $T_B\subset\mathbb{C}^n$ функций $f(z)=f(x+iy)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{y\in B}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+iy)|^p dx\right\}<+\infty. \quad (11)$$

На основании теоремы 1 может быть установлена

Теорема 4. *Пусть P — полиэдр в $\mathbb{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$ и $Y_m=a_m+V_m$ $(1\le m\le M)$. Тогда пространство $H^2(T_P)$ совпадает с классом функций f, представимых в виде*

$$f(z)=\sum_1^M f_m(z),\quad z\in T_P, \quad (12)$$

где $f_m\in H^2(T_{Y_m})$, $1\le m\le M$.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить академика АН Армении М. М. Джрбашяна за постановку задач и полезные обсуждения и профессора С. Г. Гиндикина за ценные замечания.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ և մոտարկումներ իրենց հիմքում ուռուցիկ բազմանիստ ունեցող խողովակաձև տիրույթներում

Դիցուք $1 \le p < 2$, $0 \le s < +\infty$, B-ն որևէ տիրույթ է $\mathbb{R}^n$ տարածությունում և $\gamma(y)$-ը, $y \in B$, կամայական դրական անընդհատ ֆունկցիա է։ Նշանակենք $H^p_{s,\gamma}(T_B)$-ով $T_B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in B\}$ խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն $f(z) = f(x+iy)$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար վերջավոր է

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int_B \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^s dx \right\}^p \gamma(y)\, dy$$

նորմը։ Երբ $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, այդ դասերը նշանակվում են ուղղակի $H^p_s(T_B)$-ով։ Հոդվածում դիտարկվում են $H^p_{s,\gamma}(T_P)$ դասերը, որտեղ P-ն ուռուցիկ բազմանիստ է $\mathbb{R}^n$-ում, իսկ $\gamma(y) \in L^1(P)$, և այդ դասերի համար կառուցվում են $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_P$, վերարտադրող կորիզներ՝ հոլոմորֆ ըստ z-ի և անտիհոլոմորֆ ըստ w-ի։ Բացի այդ, ապացուցվում է, որ $\sum_1^M f_m$ տեսքի գումարները, որտեղ $f_m \in H^2_s(T_{Y_m})$ $(1 \le m \le M)$, խիտ են $H^2_\gamma(T_P)$ տարածությունում ըստ այդ տարածության համապատասխան նորմի։ Այստեղ Y_m-երը $(1 \le m \le M)$ այն բազմանիստ անկյուններն են $\mathbb{R}^n$-ում, որոնք ծնում են P բազմանիստը, այսինքն՝ $P = \bigcap_{m=1}^{M} Y_m$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Paley, N. Wiener*, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. N. Y., 1934. [2] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [3] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). [4] *S. Bochner*, Math. Ann., v. 45, № , с. 686—707 (1911). [5] *С. Г. Гиндикин*, УМН, 19, № 4, с. 3—92 (1964). [6] *T. G. Genchev*, Докл. Болг. АН, т. 37, с. 717—720 (1984). [7] *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 283, № 5, с. 1054—1057 (1985). [8] *А. О. Карапетян*, Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, Канд. дисс., Ереван, 1987. [9] *А. О. Карапетян*, Изв. АН Армении, Матем., 25, № 4, с. 315—333 (1990). [10] *Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин*, Тр. Москов. мат. о-ва, т. 48, с. 211—262 (1985). [11] *M. Skwarczyn'ski*, Math. Proc. Camb. Phil. Society, v. 1 2, с. 121—129 (1987).