ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 | 1991 | № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43+513.88

В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич

Новые результаты по теории нормированных F_*-пространств и линейных операторов в этих пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 19/IX 1990)

Работа продолжает исследования ([1–11]). Терминология и обозначения будут совпадать с введенными в ([1–6, 12])*.

1. Теорема 1.1. *Пусть* $\mathrm{L} = \mathrm{L}_+ \dotplus \mathrm{L}_-$ — *банахово* F_**-пространство,* $0 < \min\{\dim \mathrm{L}_+, \dim \mathrm{L}_-\} < \infty$. *Для того чтобы любое дефинитное подпространство пространства* L *было равномерно дефинитным, необходимо и достаточно, чтобы* L *было рефлексивным.*

Доказательство получается с помощью теоремы 1' ([10]) и теоремы Джеймса ([15], гл. 1, теорема 3).

Определение 1.1. Нормированное пространство N назовем пространством с условием (Д), если для любого функционала $f \in N^*$ существует вектор $x_0 \in N$, $\|x_0\| = 1$ такой, что $f(x_0) = \|f\|$.

Как следует из ([16]), уже в сепарабельном случае существуют неполные пространства с условием (Д).

2. Лемма 2.1. *Пусть* $f \in \mathrm{D}^*_-$. *Тогда существует*

$$L_+ \in \mathfrak{M}_{++} : f(L_+) = \{0\}.$$

С помощью этой леммы и ([6]) доказывается

Теорема 2.1 (ср. ([15]), теорема 3.5). *Пусть ограниченный оператор* $A(D_A = \mathrm{N})$ *таков, что* $AL_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для всех* $L_+ \in \mathfrak{M}_{++}$. *Тогда* A — *двусторонний плюс-оператор.*

Следствие 2.1 (ср. ([12]), теорема 3.6). *Пусть ограниченный плюс-оператор* A *в* N *с полным* N_+ *задан на всем* N *и таков, что:* $AL^0_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для некоторого* $L^0_+ \in \mathfrak{M}_+$; A *не аннулирует положительных векторов;* P_+AP_- — *вполне непрерывный оператор. Тогда* A — *двусторонний плюс-оператор.*

Доказательство можно получить с помощью модификации доказательства теоремы 3.6 ([12]).

---

* По техническим причинам готическая буква „эф" заменена F; готическая „бэ" — L; готическая „пэ" — D; готическая „эн" — N; готическая „дэ" — D; готическая „ха" — λ; готическая рукописная „дэ" — Δ.

Лемма 2.2 *Пусть* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д), $f \in \mathbf{D}^*_-$. *Тогда существует* $L_+ \in \mathfrak{M}_+ : f(L_+) = \{0\}$.

С помощью ослабления условий теоремы 3.7 ([12]) удается усилить ее результаты.

Теорема 2.2 (ср. ([12]), теорема 3.7). *Пусть* $\mathbf{N}_+$ *— рефлексивное пространство,* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д); A *— ограниченный оператор,* $D_A = N$; $\overline{AL_+} \in \mathfrak{M}_+$ *для всех* $L_+ \in \mathfrak{M}_+$: $A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}$. *Тогда* A *— полустрогий вместе с сопряженным оператором и* $\overline{A^* L^*_+} \in \mathfrak{M}^*_+$ *для всех* $L^*_+ \in \mathfrak{M}^*_+$.

Доказательство получается с помощью леммы 2.2 ([5, 17]).

Следствие 2.2 (ср. ([12]), теорема 3.8). *Пусть* $\mathbf{N}_+$ *— рефлексивное пространство,* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д); A *— ограниченный плюс-оператор,* $D_A = \mathbf{N}$;

a) $AL^0_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для некоторого* $L^0_+ \in \mathfrak{M}_+$;

b) $A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}$;

c) P_+AP_- *— вполне непрерывный оператор*

d) A *не аннулирует векторов из* $\mathbf{D}_-$.

Тогда справедливо заключение теоремы 2.2.

Доказательство можно получить с помощью модификации доказательства теоремы 3.8 ([12]).

Определение 2.1. Ограниченный полустрогий оператор A с $D_A = \mathbf{N}$ назовем двояко полустрогим, если $A^*\mathbf{D}^*_{++} \subseteq \mathbf{D}^*_{++}$.

Следующее предложение является частичным обращением теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathbf{L}$ *— полное пространство,* A *— двояко полустрогий оператор. Тогда выполнены условия a) и b) теоремы 2.2.*

Замечание. Условие двоякой полустрогости в теореме 2.3 можно заменить следующими условиями:

$$A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}; \qquad A^*(\mathbf{N}^*_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}^*_{++}.$$

3. В этом пункте $\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ \dotplus \mathbf{N}_-$ — нормированное F_p-пространство, $p > 1$ (если нет специальной оговорки). $\mathbf{N}^*$ естественно превращается в F_q-пространство, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (([12]), определение 3.6). Будем рассматривать операторы, определенные на всем пространстве $\mathbf{N}$.

Определение 3.1. Строгий оператор A называется двоякострогим, если он ограничен и оператор A^* также строг.

Изучим условия двоякострогости строгих операторов.

В ([13]) доказано:

Предложение 3.1. *Для того чтобы оператор A в F_p-пространстве $\mathbf{N}$ с полным $\mathbf{N}_+$ был двоякострогим, необходимо выполнение условия $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$.*

В случае гильбертова F_2-пространства X условие $P_+AP_+X_+ = X_+$ является также и достаточным для двоякострогости строгого оператора A. Это нетрудно вывести из результатов ([1, 12]). В общем случае нормированного F_p-пространства $\mathbf{N}$ это не так. Контрпримером (уже при $p=2$) может служить пример из ([18]). Авторам неизвестно, является ли рассматриваемое условие достаточным в случае полноты пространства $\mathbf{N}_-$. Изучим ситуации, в которых это так.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathbf{N}_+$ полно, оператор Δ таков, что $F_p(\Delta x) \geqslant \alpha F_p(x)$ для всех $x \in \mathbf{N}$ $(\alpha > 0)$, $P_+\Delta P_+\mathbf{N}_+^{\cdot} = \mathbf{N}_+$. Тогда оператор Δ ограничен, $F_q(\Delta^* y) \geqslant \beta F_q(y)$ для всех $y \in \mathbf{N}^*$, где $\beta^{\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{1}{p}}$.*

Доказательство получается с помощью теоремы 1 ([13]).

Замечание 3.1. Существуют трехмерное F_p-пространство $(p > 1)$ и двоякострогий оператор A в нем, не коллинеарный F_p-несжимающему. Нетрудно показать, что этими свойствами обладают пространство и оператор A примера 4.3 ([12]). Для этого оператора и его сопряженного

$$\mu_p^{\frac{1}{p}}(A) = \mu_q^{\frac{1}{q}}(A^*).$$

Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой строгий оператор оказывается двоякострогим.

Определение 3.2. Оператор A называется фокусирующим, если

$$AD_+ \subseteq D_+^{\gamma} \equiv \{x : \|x_-\| < (1-\gamma)\|x_+\|, \quad \text{где } 0 < \gamma \leqslant 1\}.$$

Фокусирующие операторы изучались, в частности, в ([14, 19]).

Лемма 3.1. *Пусть $\nu > 0$, $\mathbf{N}_+$ полно; A — строгий оператор, $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$. Тогда A ограничен,*

$$\|P_+^* A^* f\| \geqslant \delta \|P_+^* f\|, \quad \text{где } f \in D_+^*, \quad \delta > 0. \qquad (3.1)$$

Доказательство леммы опирается, в частности, на теорему 2.2 ([12]).

(Замечание 3.2. Аналогично лемме 3.1 доказывается

Предложение. *Пусть $\nu > 0$, A — ограниченный фокусирующий оператор, $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$. Тогда справедливо неравенство (3.1), в котором можно положить $\delta = \gamma$).*

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbf{N}$ — рефлексивное F_p-пространство, $p > 1$; A — строгий фокусирующий оператор. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$; 2) $AL_+ \in \mathfrak{M}_+$ для всех $L_+ \in \mathfrak{M}_+$; 3) A^* — строгий фокусирующий оператор в банаховом F_q-пространстве $\mathbf{N}^*$.*

Доказательство теоремы опирается на модификацию теоремы 3.2 ([12]), предложение 3.1, ([14]) и лемму 3.1.

4. Рассмотрим оператор B такой, что $P_+ D_B \subseteq D_B$. Относительно разложения $D_B = (N_+ \cap D_B) \dotplus (N_- \cap D_B)$ представим B операторной матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать B_{11} как оператор на $N_+ \cap D_B$ и т. д.

Теорема 4.1. *Пусть B_{12} — ограниченный оператор,*

$$\|P_+ Bx\| \geq \delta \|x\|, \quad \text{где } x \in D_+ \cap D_B, \quad \delta > 0. \qquad (4.1)$$

Тогда $\operatorname{Ker} B_{11} = \{0\}$, оператор $B_{11}^{-1} B_{12}$ ограничен и $\|B_{11}^{-1} B_{12}\| < 1$.

Следствие. *Пусть N есть F_+-пространство, $\varkappa > 0$; N_+ полно; A — строгий оператор, $N_+ \subseteq D_A$, $P_+ A P_+ N_+ = N_+$. Тогда* $\|A_{11}^{-1} A_{12}\| < 1$.

Теорема 4.2. *Пусть A удовлетворяет условиям леммы* 3.1. *Тогда* $\|A_{21} A_{11}^{-1}\| < 1$.

Доказательство опирается на теорему 4.1.

Ленинградский финансово-экономический институт

Վ. Ա. ՍԵՆԴԵՐՈՎ, Վ. Ա. ԽԱՑԿԵՎԻՉ

Նոր արդյունքներ նորմավորված F_+-տարածությունների և այդ տարածություններում գործող գծային օպերատորների տեսությունում

Դիտարկված են +-օպերատորներ գործող F_+ տարածություններում։ Ստացված են արդյունքներ +-օպերատորների տեսության, ինչպես նաև F_+ տարածությունների երկրաչափության մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян*, Мат. исследования, Кишинев т. 1, № 1 (1966). [2] *F. F. Bonsall*, Quart. J. Math. Oxford (2). 6 (1955). [3] *М. Л. Бродский*, УМН т. 14, № 1 (85) (1959). [4] *И. С. Иохвидов*, ДАН СССР, т. 169, № 2 (1966). [5] *И. С. Иохвидов*. ДАН СССР, т. 169, № 3 (1966). [6] *И. С. Иохвидов*, Изв. АН МССР, т. I (1968). [7] *Л. С. Понтрягин*, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 8 (1944). [8] *Ю. П. Гинзбург* Науч. зап. Одесск. пед. ин-та, т. 25, № 2 (1961). [9] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, УМН, т. 34 № 5 (1979) [10] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, ДАН АрмССР, т. 74, № 1, (1982) [11] *В. А. Сендеров В. А. Хацкевич*, Деп. ВИНИТИ, № 3618—80, 1980, [12] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, Мат. исследования. Кишинев, РИО АН МССР т. 8, № 3 (29) (1973). [13] *Е. И. Иохвидов, В. А. Сендеров*, Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, вып. 5 (1972). [14] *В. А. Хацкевич*. ДАН АрмССР, т. 79, № 3 (1984). [15] *Дж. Дистель*. Геометрия банаховых пространств, Высшая школа, Киев, 1980. [16] *James C. Robert* Isr. J. Math., v. 9, № 4 (1971). [17] *В. А. Хацкевич* Изв. вузов. Математика, № 6, 1973. [18] *Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров*, Сб. тр. аспирантов мат. фак. Воронеж. ун-та, вып. 2 1971. [19] *В. А. Хацкевич*, Мат. заметки, т. 30, № 5 (1981)