

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УКД 539.3

Член-корреспондент АН Армении Б. Л. Абрамян

О деформации горизонтально расположенного упругого цилиндра конечной длины с одним закрепленным торцом под действием собственного веса

(Представлено 1/XI 1990)

Рассматривается задача об изгибе круглого однородного упругого цилиндра конечной длины, когда цилиндр жестко закреплен своим одним торцом, находится в горизонтальном положении и деформируется под действием собственного веса.

1. *Постановка задачи.* Направляем ось Oz по оси цилиндра. Начало цилиндрической координатной системы помещаем в центре закрепленного торца и считаем, что сила тяжести действует перпендикулярно к оси цилиндра. Тогда граничные условия задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, 0) = u_\varphi(r, \varphi, 0) = u_z(r, \varphi, 0) = 0; \\ \sigma_z(r, \varphi, l) = \tau_{z\varphi}(r, \varphi, l) = \tau_{rz}(r, \varphi, l) = 0; \\ \sigma_r(R, \varphi, z) = \tau_{rz}(R, \varphi, z) = \tau_{r\varphi}(R, \varphi, z) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где R и l — радиус и длина цилиндра, u_s , σ_s ($s = r, \varphi, z$), τ_{rz} , $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\varphi z}$ компоненты перемещения и напряжений.

Уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрической системе координат при отсутствии осевой симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho}{G} R = 0; \\ \nabla^2 u_\varphi + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\rho}{G} Q = 0; \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} Z = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь R , Q , Z — компоненты массовых сил, ν , G и ρ — коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала цилиндра, соответственно,

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1.3) \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$R = g \cos \varphi, \quad Q = g \sin \varphi, \quad Z = 0, \quad (1.4)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Решение уравнений (1.2) берется в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, z, \varphi) &= [u_r^{(1)}(r, z) + u_r^{(0)}(r, z)] \cos \varphi; \\ u_\varphi(r, z, \varphi) &= [u_\varphi^{(1)}(r, z) + u_\varphi^{(0)}(r, z)] \sin \varphi; \\ u_z(r, z, \varphi) &= [u_z^{(1)}(r, z) + u_z^{(0)}(r, z)] \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где в правой части (1.5) со значком (0) указывается частное решение уравнений (1.2)

$$u_r^{(0)} = u_\varphi^{(0)} = Ar^2, \quad u_z^{(0)} = Arz, \quad A = -\frac{1-2\nu}{15G} \rho g. \quad (1.6)$$

Общее решение уравнений (1.2) при отсутствии массовых членов строится при помощи функций П. Ф. Папковича

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \varphi_1(r, z) - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi_1 + z\varphi_3 + \varphi_0); \\ u_\varphi^{(1)} &= \varphi_1(r, z) + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{1}{r} (r\varphi_1 + z\varphi_3 + \varphi_0); \\ u_z^{(1)} &= \varphi_3(r, z) - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (r\varphi_1 + z\varphi_3 + \varphi_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где функции $\varphi_i(r, z)$ ($i = 1, 3, 0$) удовлетворяют уравнениям (1.8)

$$\nabla_2^2 \varphi_1 = \nabla_1^2 \varphi_3 = \nabla_1^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2}. \quad (1.8)$$

2. Сведение задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Функции $\varphi_i(r, z)$, удовлетворяющие уравнениям (1.8), при ($0 < r < R$ и $0 < z < l$) берутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) &= A_0^{(1)} r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} I_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} J_2(\beta_k r) (A_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k z), \\ \varphi_3(r, z) &= (A_0^{(3)} z + B_0^{(3)}) r + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(3)} I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\beta_k r) (A_k^{(3)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(3)} \operatorname{ch} \beta_k z), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(r, z) = (A_0^{(0)} + B_0^{(0)} z) r + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(0)} J_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\beta_k r) (A_k^{(0)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(0)} \operatorname{ch} \beta_k z), \quad (2.1)$$

где $J_n(x)$ и $I_n(x)$ — функции Бесселя первого рода, соответственно от действительного и мнимого аргументов ⁽²⁾.

При удовлетворении граничных условий используются также представления следующего вида:

$$r\varphi_1 = A_0^{(1)} r^3 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} r J_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} z (A_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k z + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k z) J_1(\beta_k r), \\ z\varphi_2 = (A_0^{(2)} z + B_0^{(2)}) r z + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} r J_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} z (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k z) J_1(\beta_k r), \quad (2.2)$$

которые справедливы на основе уравнений (1.8) и представлений (2.1).

Если в этих выражениях принимать, что

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad J_1(\beta_k R) = 0, \quad (2.3)$$

то можно пользоваться разложениями в ряды по функциям Бесселя следующих видов ⁽³⁾:

$$f(r) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_1(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_2(\beta_k r) \quad (2.4) \\ (0 < r < R)$$

и следующими значениями интегралов:

$$\int_0^R r J_s(\beta_k r) J_s(\beta_m r) dr = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \Omega_m^{(s)} & k = m \end{cases} \quad (s = 0, 1, 2), \quad (2.5)$$

где

$$\Omega_m^{(s)} = \frac{R^2 J_0^2(\beta_m R)}{2}. \quad (2.6)$$

Эти значения можно получить, используя интегралы Ломмеля для бесселевых функций.

Используя функции (2.1), (2.2), представляя при помощи выражений (1.7) перемещения в виде сумм рядов Фурье и Фурье—Дини, представляя в таком виде также и напряжения и удовлетворив гранич-

ным условиям (1.1), для искомых коэффициентов получим следующие значения:

$$A_0^{(3)} = \frac{2(1-\nu)(2+\nu)\rho g}{5G\nu}, \quad B_0^{(3)} = -\frac{\rho g l}{G}, \quad B_0^{(0)} = (3-4\nu)B_0^{(3)}, \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(0)} &= -A_0^{(1)}R^2 + \frac{2(1-\nu)}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{(3)} I_1(\lambda_k R)}{\lambda_k}, \\ A_0^{(1)} &= \frac{1}{R^2 l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(\beta_k R)}{\beta_k} [(3-4\nu)A_k^{(1)} + \nu \operatorname{sh} \beta_k l A_k^{(3)} + \\ &\quad + B_k^{(3)}(1-2\nu + \nu \operatorname{ch} \beta_k l)] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

и

$$\left. \begin{aligned} B_m^{(1)} &= -A_m^{(1)} \operatorname{cth} \beta_m l, \quad A_m^{(0)} \beta_m = (3-4\nu)B_m^{(3)} - A_m^{(1)}, \\ B_m^{(0)} \beta_m &= A_m^{(3)}(1-2\nu - \beta_m l \operatorname{cth} \beta_m l) + A_m^{(1)} \left(\operatorname{cth} \beta_m l + \frac{\beta_m l}{\operatorname{sh}^2 \beta_m l} \right) - \\ &\quad - B_m^{(3)} [2(1-\nu) \operatorname{cth} \beta_m l + \beta_m l], \\ C_m^{(0)} \lambda_m &= -2(1-\nu)C_m^{(3)} - \frac{t_m I_2(t_m)}{I_1(t_m)} (C_m^{(1)} + C_m^{(3)}), \quad t_m = \lambda_m R \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

А для определения коэффициентов $B_m^{(3)}$, $A_m^{(1)}$, $A_m^{(3)}$, $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(3)}$ получаем бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

После замены этих искомых коэффициентов при помощи следующих обозначений другими

$$\left. \begin{aligned} t_m C_m^{(1)} I_1(t_m) &= \kappa R X_m^{(1)} \quad (i=1, 3) \\ 2\beta_m R J_0(\beta_m R) A_m^{(1)} &= l X_m^{(2)}, \\ 2\beta_m R J_0(\beta_m R) B_m^{(3)} &= l (2X_m^{(4)} - X_m^{(2)}) \\ 2\beta_m R J_0(\beta_m R) \operatorname{sh} \beta_m l A_m^{(3)} &= 2l X_m^{(5)} - l \operatorname{ch} \beta_m l (2X_m^{(4)} - X_m^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где κ является постоянным числом—нормирующим множителем, подлежащим определению в дальнейшем, для новых неизвестных величин получим бесконечные системы линейных уравнений следующих видов:

$$\left. \begin{aligned} X_m^{(i)} &= M_m^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}^{(i)} X_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km}^{(i)} X_k^{(4)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}^{(i)} X_k^{(5)}, \\ &\quad (i=1, 3) \\ X_m^{(2)} &= M_m^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} L_{km}^{(2)} X_k^{(1)}, \\ X_m^{(4)} &= M_m^{(4)} + \sum_{k=1}^{\infty} L_{km}^{(4)} X_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km}^{(4)} X_k^{(3)} \quad (i=4, 5) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_m^{(1)} &= \frac{2\rho g R}{\Omega_m \times t_m^2 G} \left[1 - \frac{2(2-\nu) I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} - \frac{I_2^2(t_m)}{I_1^2(t_m)} \right], \\ A_{km}^{(1)} &= \frac{2}{\Omega_m \times R^2} \left[1 - \frac{2I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} - \frac{I_2^2(t_m)}{I_1^2(t_m)} \right] \frac{1}{\beta_k^2 + \lambda_m^2}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$B_{km}^{(1)} = \frac{4}{\Omega_m \times R^2} \frac{I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \frac{(1-\nu)\lambda_m^2 - \nu\beta_k^2}{(\beta_k^2 + \lambda_m^2)^2} + A_{km}^{(1)},$$

$$C_{km}^{(1)} = \frac{4}{\Omega_m \times R^2} \frac{I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \frac{(-1)^m \beta_k^2}{(\beta_k^2 + \lambda_m^2)^2} + (-1)^{m+1} A_{km}^{(1)}.$$

$$\begin{aligned} M_m^{(3)} &= -M_m^{(1)} - \frac{4(1-\nu)\rho g R}{\Omega_m \times t_m^2 G} \left[1 - \frac{3I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \right], \\ A_{km}^{(3)} &= \frac{4(1-\nu)I_2(t_m)}{\Omega_m \times R^2 t_m I_1(t_m) (\beta_k^2 + \lambda_m^2)} - A_{km}^{(1)}, \\ B_{km}^{(3)} &= \frac{4}{\Omega_m \times R^2} \left[1 - \frac{3I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \right] \frac{(1-\nu)\lambda_m^2 - \nu\beta_k^2}{(\beta_k^2 + \lambda_m^2)^2} + A_{km}^{(3)}, \\ C_{km}^{(3)} &= \frac{4}{\Omega_m \times R^2} \left[1 - \frac{3I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \right] \frac{(-1)^m \beta_k^2}{(\beta_k^2 + \lambda_m^2)^2} + (-1)^{m+1} A_{km}^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} M_m^{(2)} &= -\frac{16R \operatorname{th} \beta_m l}{\beta_m l} \left[A_0^{(1)} - \frac{(1-2\nu)\rho g}{5G} \right], \\ D_{km}^{(2)} &= -\frac{2 \times \beta_m \operatorname{th} \beta_m l}{l(\lambda_k^2 + \beta_m^2)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} M_m^{(4)} &= \frac{16R}{\omega_m \beta_m l} \left\{ A_0^{(1)} [\nu s_m^{(1)} - (1-2\nu) s_m^{(2)}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)(1-2\nu)\rho g}{5G\nu} [(1+\nu) s_m^{(1)} + 2\nu s_m^{(2)}] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{km}^{(4)} &= \frac{4\beta_m \times}{\omega_m l (\lambda_k^2 + \beta_m^2)^2} \{ s_m^{(1)} (-1)^k [\nu\beta_m^2 - (1-\nu)\lambda_k^2] - \\ &\quad - s_m^{(2)} [2(1-\nu)\lambda_k^2 + (1-2\nu)\beta_m^2] \}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$E_{km}^{(4)} = \frac{4\beta_m \times}{\omega_m l (\lambda_k^2 + \beta_m^2)^2} [s_m^{(1)} (-1)^k \beta_m^2 + s_m^{(2)} [\nu\beta_m^2 - (1-\nu)\lambda_k^2]],$$

$$\begin{aligned}
M_m^{(5)} &= \frac{16R}{\omega_m \beta_m l} \left\{ A_0^{(1)} [\nu s_m^{(3)} + (1 - 2\nu) s_m^{(1)}] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu) \rho g}{5G \nu} [(1 + \nu) s_m^{(3)} - 2\nu s_m^{(1)}] \right\}, \\
D_{km}^{(5)} &= \frac{4\beta_m x}{\omega_m l (\lambda_k^2 + \beta_m^2)^2} \{ s_m^{(3)} (-1)^k [\nu \beta_m^2 - (1 - \nu) \lambda_k^2] + \\
&\quad + s_m^{(1)} [2(1 - \nu) \lambda_k^2 + (1 - 2\nu) \beta_m^2] \}, \\
E_{km}^{(5)} &= \frac{4\beta_m x}{\omega_m l (\lambda_k^2 + \beta_m^2)^2} \{ s_m^{(3)} (-1)^k \beta_m^2 + s_m^{(1)} [(1 - \nu) \lambda_k^2 - \nu \beta_m^2] \}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь введены также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Omega_m &= \frac{2I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \left[\frac{I_2^2(t_m)}{I_1^2(t_m)} + \frac{(1 + \nu) I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} \right] + \\
&\quad + 1 - \frac{4I_2(t_m)}{t_m I_1(t_m)} - \frac{I_2^2(t_m)}{I_1^2(t_m)},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\omega_m &= (3 - 4\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m l + \beta_m^2 l^2 + (1 - 2\nu)^2, \quad s_m^{(1)} = (1 - 2\nu) \operatorname{sh} \beta_m l - \beta_m l \operatorname{ch} \beta_m l, \\
s_m^{(2)} &= \operatorname{sh} \beta_m l \operatorname{ch} \beta_m l + \beta_m l, \quad s_m^{(3)} = (3 - 4\nu) \operatorname{sh} \beta_m l \operatorname{ch} \beta_m l - \beta_m l.
\end{aligned}$$

Совокупность систем (2.11) можно записать в виде одной системы

$$W_n = \sum_{p=1}^{\infty} L_{pn} W_p + S_n \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{2.18}$$

если пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned}
W_{5m-4} &= X_m^{(1)}; \quad W_{5m-3} = X_m^{(2)}; \quad W_{5m-2} = X_m^{(3)}; \\
W_{5m-1} &= X_m^{(4)}; \quad W_{5m} = X_m^{(5)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Для системы (2.18), пользуясь значениями (2.12) — (2.16) и приняв $2x = \sqrt{6}$, получаем оценку

$$\sum_{p=1}^{\infty} |L_{pn}| \leq \sqrt{6} < +\infty \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.20}$$

То есть систему (2.18), которая имеет для больших индексов «n» стремящиеся к нулю свободные члены, можно рассматривать как квазирегулярную или квази вполне регулярную систему (3, 4). Такие системы можно представить в виде двух систем

$$W_n = \sum_{p=1}^N L_{pn} W_p + \left(\sum_{p=N+1}^{\infty} L_{pn} W_p + S_n \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N); \tag{2.21}$$

$$W_n = \sum_{p=N+1}^{\infty} L_{pn} W_p + \left(\sum_{p=1}^N L_{pn} W_p + S_n \right) \quad (n = N+1, N+2, \dots), \tag{2.22}$$

где имеет место условие

$$\sum_{p=N+1}^{\infty} |L_{p,i}| \leq 1 - \theta < 1 \quad (0 < \theta < 1). \quad (2.23)$$

При численном решении систем (2.21) и (2.22) вначале на основе оценки (2.20) определяется число N , далее решается система (2.22), которая является квази регулярной или квази вполне регулярной, и неизвестные $\{W_n\}$ ($n = N + 1, N + 2, \dots$) определяются зависящими от чисел $\{W_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$), затем решается конечная система (2.21).

Институт механики
Академии наук Армении

Հայաստանի ԳԱ քաղաքացիական Բ. Լ. ԱՐԴԱՀԱՄՅԱՆ

Մեկ ամրակցված ճիմնով իր կշռի ազդեցության տակ ճարձգանալիս դիմում գտնվող վերջավոր երկարությամբ առաձգական գլանի դեֆորմացիայի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր երկարությամբ համասեռ առաձգական կլոր գլանի ծռման վերաբերյալ խնդիրը, երբ գլանը իր մի հիմքով ամրակցված է կոշտ պատին, գտնվում է հորիզոնական դիրքում և դեֆորմացիայի է ենթարկվում իր կշռի ազդեցության տակ:

Խնդրի լուծումը կառուցվում է Պ. Ֆ. Պապկովիչի ֆունկցիաների օգնությամբ և փնտրվող մեծությունները ներկայացվում են Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դիլիի շարքերի գումարների տեսքով:

Խնդրի լուծումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների համախմբի, որը բավարարվում է լիովին ռեզոնանսային դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Б. Л. Абрамян, ДАН АрмССР, т. 35, № 4, с. 151—159 (1962). 2 Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. Ч. 1, ИЛ, М., 1949. 3 Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, Л.—М., 1949. 4 Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Т. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Л.—М., 1950.