ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 519.613

А. С. Лялаян

Обращение обобщенной теплицево-ганкелевой матрицы

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 5/X 1990)

1. Пусть $A = \|a_{pi-qj}\|_{i,j=0}^{n}$ — обобщенная теплицева матрица и $H = \|h_{pi+qj}\|_{i,j=0}^{n}$ — обобщенная ганкелева матрица. Здесь p, q — заданные взаимно простые натуральные числа; a_μ, h_ν — заданные комплексные числа ($\mu = pi - qj$, $\nu = pi + qj$).

Матрицу $S = \|s_{ij}\|_{i,j=0}^{n} = \|a_{pi-qj} + h_{pi+qj}\|_{i,j=0}^{n}$ назовем обобщенной (см. ([1])) теплицево-ганкелевой матрицей. Введем также вспомогательную матрицу $\tilde{S} = \|\tilde{s}_{ij}\|_{i,j=0}^{n} = \|a_{pi-qj} - h_{pi+qj+pq}\|_{i,j=0}^{n}$, которая определена с точностью до элементов $h_{pi+qj+pq}$ ($i = n-q+1, n-q+2, \ldots, n$; $j = n-p+1, n-p+2, \ldots, n$). Обозначим

$$S^{-1} = R = \|r_{ij}\|_{i,j=0}^{n};$$

$$\tilde{S}^{-1} = \tilde{R} = \|\tilde{r}_{ij}\|_{i,j=0}^{n}$$

и условимся считать, что

$$\left.\begin{aligned} r_{ij} = \tilde{r}_{ij} = 0 \\ s_{ij} = \tilde{s}_{ij} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при $\min(i, j) < 0$ или $\max(i, j) > n$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрицы S и $\tilde{S}$ обратимы, и, кроме того,*

$$\det R_1 \neq 0, \quad \det R_2 \neq 0, \quad \det \tilde{R}_1 \neq 0, \quad \det \bar{R}_2 \neq 0$$

где

$$R_1 = \|r_{ij}\|_{i,j=0}^{p-1}, \quad R_2 = \|r_{ij}\|_{i,j=0}^{q-1}$$

$$\tilde{R}_1 = \|\tilde{r}_{ij}\|_{i,j=n-p+1}^{n}, \quad \bar{R}_2 = \|\bar{r}_{i,j}\|_{i,j=n-q+1}^{n}.$$

Тогда справедливы рекуррентные формулы:

$$r_{k+p,j} = r_{kj} + r_{k,j-q} - \left(1 - \sum_{s=0}^{q-1} \delta_{n-s,j}\right)\tilde{r}_{kj} - \sum_{d=0}^{p-1} r_{dj}\tilde{x}_{kd} + \sum_{l=n-q+1}^{n} \bar{r}_{kl}\tilde{y}_{lj} \quad (2)$$

$$\tilde{r}_{kj} = r_{k-p,\,j} - r_{k,\,j+q} + \left(1 - \sum_{s=0}^{q-1} \delta_{sj}\right) r_{kl} + \sum_{m=0}^{q-1} r_{km}\, y_{mj} + \sum_{d=n+1}^{n+p} \tilde{r}_{d-p,\,j}\, x_{kd} \tag{3}$$

где

$$x_{kd} = \sum_{l=0}^{n} r_{kl}\,(a_{pl-qd} + h_{pl+qd}), \qquad \tilde{x}_{kd} = \sum_{l=0}^{n} \tilde{r}_{kl}\,(a_{pl+pq-pl} - h_{pl+qd})$$

$$y_{mj} = \sum_{k=0}^{n} (s_{mk} - s_{m,\,k+p})\,\tilde{r}_{kj}, \qquad \tilde{y}_{lj} = \sum_{k=0}^{n} (\tilde{s}_{l,\,k-p} - s_{lk})\, r_{kj}$$

δ — *символ Кронекера.*

2. В последовательности матриц

$$S_k = \| a_{pi-qj} + h_{pi+qj-kpq} \|_{\substack{i=kq,\,kq+1,\,\ldots,\,n \\ j=0,\,1,\,\ldots,\,n+pk}}$$

рассмотрим матрицы S_2 и S^t_{-2} (символ „t" означает транспонирование). Изучим ядра ($\ker S_2$, $\ker S^t_{-2}$) указанных матриц (см. ([2])). В пространстве рациональных многочленов от двух переменных видов

$$P(x,\ z) = \sum_{i,\,j} p_{ij}\, x^i z^j; \qquad Q(y,\ t) = \sum_{i,\,j} q_{ij}\, y^i t^j,$$

определим линейные функционалы σ_{xz}, σ_{yt} по формулам:

$$\sigma_{xz}\{P(x,\ z)\} = \sum_{i,\,j} p_{ij}\,(a_i + h_j); \qquad \sigma_{yt}\{Q(y,\ t)\} = \sum_{i,\,j} q_{ij}\,(a_i + h_j).$$

Обозначим через $\ker S_2(x,\ z)$ пространство многочленов $P^-(x^q z^{-q})$ по неположительным степеням $x^q z^{-q}$ формальной степени $(n+2p)\,q$, удовлетворяющих условиям

$$\sigma_{xz}\{x^i z^{i-2pq} P^-(x^q z^{-q})\} = 0$$

для $i = 2pq,\ \ p(2q+1), \ldots, np$

Обозначим через $\ker S^t_{-2}(y,\ t)$ пространство многочленов $Q^+(y^p t^p)$ по неотрицательным степеням $y^p t^p$ формальной степени $(n+2q)\,p$, удовлетворяющих условиям:

$$\sigma_{yt}\{y^{-i} t^{i-2pq} Q^+(y^p t^p)\} = 0$$

для $i = 2pq,\ \ q(2p+1), \ldots, nq.$

Пространства многочленов $P^-(x^q z^{-q})$, $Q^+(y^p t^p)$ естественно изоморфны пространствам $\ker S_2$ и $\ker S^t_{-2}$ соответственно. Для матрицы R определим производящий многочлен от четырех переменных:

$$R(x,\ z,\ y,\ t) = \sum_{i,\,j=0}^{n} r_{ij}\, x^{-qi} z^{qi} y^{pj} t^{pj}.$$

Тогда, как нетрудно видеть, многочлен

$R_1(x,\ z,\ y,\ t) = (y^{pq} t^{pq} - x^{-pq} z^{pq})(1 - x^{-pq} z^{pq} y^{pq} t^{pq})\, R(x,\ z,\ y,\ t)$ как многочлен от $x^q z^{-q}$ принадлежит $\ker S_2(x,\ z)$, как многочлен от

$y^p t^p$ принадлежит $\ker S'_{-2}(y, t)$. Так как каждое из пространств $\ker S_2(x, z)$, $\ker S'_{-2}(y, t)$ является $2(p+q)$-мерным, то можно написать:

$$R_1(x, z, y, t) = \sum_{i, j=1}^{2(p+q)} a_{ij} P_i^-(x^q z^{-q}) Q_j^+(y^p t^p)$$

где a_{ij} — комплексные постоянные, метод отыскания которых приводится ниже. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть матрица S обратима и R — обратная к ней. Тогда, если*

$$P_k^-(x^q z^{-q}) = \sum_{m=0}^{n+2p} p_{km} (x^q z^{-q})^{-m} \in \ker S_2(x, z)$$

$$Q_l^+(y^p t^p) = \sum_{d=0}^{n+2q} q_{ld} (y^p t^p)^d \in \ker S'_{-2}(y, t)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2(p+q); \quad l = 1, 2, \dots, 2(p+q)$$

то справедлива рекуррентная формула:

$$r_{i, j-q} - r_{i-p, j-2q} - r_{i-p, j} + r_{i-2p, j-q} = \sum_{k, l=1}^{2(p+q)} a_{kl} p_{ki} q_{lj} \tag{4}$$

$$i = 0, 1, \dots, n+2p; \quad j = 0, 1, \dots, n+2q$$

с учетом условий (1).

3. Знание многочленов $P_k^-(x^q z^{-q})$, $Q_l^+(y^p t^p)$ $(k, l = 1, 2, \dots, 2(p+q))$, а также любых $2(p+q)$ строк (или столбцов) матрицы R позволяет, используя формулу (4), отыскать коэффициенты a_{kl}. Без ограничения общности можно считать, что нам известны первые и последние $p+q$ строк матрицы R. Тогда подстановка в (4) поочередно

$$i = 0; \quad j = q, q+1, \dots, q+2(p+q)-1$$
$$\vdots$$
$$i = p+q-1; \quad j = q, q+1, \dots, q+2(p+q)-1$$

и, далее, после замены $i_0 = i - 2p$ в формуле (2)

$$i_0 = n-(p+q)+1; \quad j = q, q+1, \dots, q+2(p+q)-1$$
$$\vdots$$
$$i_0 = n \qquad ; \quad j = q, q+1, \dots, q+2(p+q)-1$$

позволяет нам получить $2(p+q)$ совместных систем относительно неизвестных a_{kl}.

4. Теорема 1 содержит алгоритм одновременного восстановления элементов матриц R и $\bar{R}$ в случае, если известны их элементы в „граничной полосе" ширины $\max(p, q)$.

Теорема 2 позволяет определить элементы матрицы R по известным значениям коэффициентов многочленов $P^- \in \ker S_2$, $Q^+ \in \ker S'_{-2}$ и комплексных постоянных α_{kl}. Однако для отыскания $2(p+q)$ строк (или столбцов) матрицы R знания одних только многочленов $P^- \in \ker S_2$ и $Q^+ \in \ker S'_{-2}$ не достаточно. Если $p \leqslant q$ (что без ограничения общности можно допустить), то необходимо знать $4(p+q)$ многочленов $P^- \in \ker S_4$, посредством которых легко находятся как многочлены $P^- \in \ker S_2$, так и первые и последние $p+q$ строк матрицы R.

Можно показать что процесс отыскания многочленов (векторов)

$$P^- \in \ker S_4, \quad \bar{P}^- \in \ker \bar{S}_4 \text{ и } Q^+ \in \ker S'_{-2}, \quad \tilde{Q}^+ \in \ker \bar{S}'_{-2}$$

где $\bar{S}_k = \| a_{pi-qj} - h_{pi+qj-(k-1)pq} \|_{\substack{i=kq,\, kq+1, \dots, n \\ j=0,\, 1, \dots, n+pk}}$, рекуррентен и количество мультипликативных операций при $N \to \infty$ (N — размер матрицы) соответственно порядка $\alpha N^2 + O(N)$ и $\bar{\alpha} N^2 + O(N)$ вместо $O(N^3)$ в случае матриц общего вида, причем справедлива оценка:

$$\alpha + \tilde{\alpha} \leqslant (p+q+1)(8p+8q+10).$$

Количество аддитивных операций также имеет порядок $O(N^2)$.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Ս. ԼԱԼԱՅԱՆ

Ընդհանրացված Տյոպլից—Հանկելյան մատրիցի շրջումը

Ներկայացված հոդվածում տրվում են $S = \| a_{pi-qj} \| + \| h_{pi+qj} \|$ տեսքի մատրիցների շրջման բանաձևեր, որպես ([1])-ում ստացված բանաձևերի ընդհանրացումներ։ Ինչպես նաև ներմուծվում է որոշակի տեսքի մատրիցների համար կորիզի և էական բազմանդամների գաղափարը, որպես ([2])-ում առաջարկված մեթոդի ընդհանրացում, և տրվում է ռեկուրենտ բանաձև $R = S^{-1}$ հակադարձ մատրիցի տարրերի վերականգնման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Б. Нерсесян, А. А. Папоян*, Изв. АН АрмССР Математика, т. 18, № 2, с. 150—160 (1983). [2] *В. М. Адуков*, Изв. ВУЗов, № 7, с. 3—8, 1986