ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 4

**МЕХАНИКА**

УДК 539.3

**М. В. Белубекян, В. В. Овсепян**

# Об условии существования поверхностной волны для упругого пространства с цилиндрической полостью

(Представлено академиком АН Армении С. А. Амбарцумяном 20/VII 1990)

В цилиндрической системе координат исследуется вопрос существования поверхностной волны для бесконечной упругой среды с цилиндрической полостью в случае, когда волна распространяется вдоль образующей цилиндра (осесимметричная задача). Эта задача ранее рассматривалась в ([1, 2]). В работе ([3]) исследуются поверхностные волны в окружном направлении. Общий случай рассмотрен в ([4]).

В данной работе выведено необходимое и достаточное условие для существования и единственности поверхностной волны.

1. Рассматриваются установившиеся колебания с частотой $\omega$ и предполагается, что цилиндрическая поверхность свободна от напряжений. Дисперсионное уравнение задачи, как и в ([5]) имеет вид

$$R(\eta) = (2-\eta)^2 K_0(ka\sqrt{1-\theta\eta})K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\theta\eta}) - 4\sqrt{1-\theta\eta}\times$$

$$\times\sqrt{1-\eta}\,K_0(ka\sqrt{1-\eta})K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\eta}) - 2\eta(ka)^{-1}\sqrt{1-\eta} = 0, \quad (1)$$

где $\eta = \omega^2(kC_t)^{-2}$ — искомая безразмерная скорость распространения поверхностной волны, $\theta = C_t^2(C_e)^{-2} = (1-2\nu)[2(1-\nu)]^{-1}$, $\nu$ — коэффициент Пуассона ($-1<\nu<0{,}5$), $c_e$ и $c_t$ — скорости распространения соответственно продольной и поперечной волны, $a$ — радиус полости, $k$ — волновое число по образующей цилиндра, $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

В работе ([1]) уравнение (1) исследовалось по параметру $(\omega a)^{-1}$. В работе ([2]) непосредственно численно исследовалось дисперсионное уравнение (1). Здесь для исследования уравнения (1) используется подход, аналогичный изложенному в работе ([6]).

2. Корень $\eta=0$ является тривиальным решением уравнения (1). От этого решения можно избавиться, представляя (1) в виде

$$R_1(\eta) = \eta^{-1}R(\eta). \quad (2)$$

В пределе $\eta\to 0$ для функции $R_1(\eta)$ получим

$$\lim R_1(\eta) = 2ka\,(1-\theta)\,[K_0^2(ka)\,K_1^{-2}(ka) - 1] - 2(ka)^{-1} < 0. \tag{3}$$

Для существования хотя бы одного решения в интервале $0 < \eta < 1$ достаточно требовать $R_1(1) > 0$. Но это имеет место при условии

$$K_0(ka\sqrt{1-\theta})\,K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\theta}) > 2\,(ka)^{-1}\sqrt{1-\theta}. \tag{4}$$

Если докажем положительность функции $R_1(\eta)$, то тем самым будет доказано, что (4) является необходимым и достаточным условием для существования и единственности поверхностной волны в интервале $0 < \eta < 1$. Представим $R_1'(\eta)$ в виде

$$R_1'(\eta) = 2\sqrt{1-\theta\eta}\,\eta^{-1}(1-\eta)^{-1/2}\varphi(\eta) + 2\theta\sqrt{1-\eta}\,\eta^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}\varphi(\eta) -$$

$$-2(2-\eta)\,\eta^{-1}\varphi(\theta\eta) + 4\sqrt{1-\theta\eta}\sqrt{1-\eta}\,\eta^{-2}\varphi(\eta) - (2-\eta)^2\eta^{-2}\varphi(\theta\eta) -$$

$$-4\sqrt{1-\theta\eta}\sqrt{1-\eta}\,\eta^{-1}\varphi'(\eta) + (2-\eta)^2\eta^{-1}\varphi'(\theta\eta) + \theta(ka)^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}, \tag{5}$$

где $\varphi(\eta) = K_0(ka\sqrt{1-\eta})\,K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\eta})$.

В работе ([1]) доказано, что $f(x) = K_0(x^{-1})\,K_1^{-1}(x^{-1})$ монотонно убывающие функции. Так как $\theta < 1$, получим, что $\varphi(\theta\eta) > \varphi(\eta)$. Обозначим через $R_{01}(\eta)$ сумму первых пяти слагаемых в формуле (5), а через $R_{02}(\eta)$ — сумму последних слагаемых. Тогда имеем $R_1(\eta) = R_{01}(\eta) + R_{02}(\eta)$. Докажем положительность функций $R_{01}(\eta)$ и $R_{02}(\eta)$.

Заменив в функции $R_{01}(\eta)$ $\varphi(\theta\eta)$ на $\varphi(\eta)$, после некоторых небольших преобразований получим

$$R_{01}(\eta) = \varphi(\eta)\,\eta^{-1}\,[2(1-\eta)^{-1/2}(1-\theta\eta)^{-1/2}(2-\eta-\theta\eta) - 4 + \eta^2].$$

Можно доказать, что

$$2(2-\eta-\theta\eta) > (4-\eta^2)\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta}. \tag{6}$$

Возведя в квадрат обе части неравенства (6), после некоторых преобразований получим

$$\eta^2(3 - 8\theta + 4\theta^2 + 8 - 8\eta - 8\theta\eta + 8\theta\eta^2 + 1 - \eta^2 + \eta^3 + \theta\eta^3 - \theta\eta^4) > 0.$$

Легко доказывается, что последнее неравенство в интервалах $0 < \eta < 1$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 0{,}5$ положительно. Таким образом доказана положительность функции $R_{01}(\eta)$.

Докажем также положительность функции $R_{02}(\eta)$. Для этого представим функции $\varphi'(\eta)$ и $\varphi'(\theta\eta)$ в виде

$$\varphi'(\eta) = -ka\,2^{-1}(1-\eta)^{-1/2}[-1 + \varphi^2(\eta) + (ka)^{-1}(1-\eta)^{-1/2}\varphi(\eta)],$$

$$\varphi'(\theta\eta) = -ka\,\theta\,2^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}[-1 + \varphi^2(\theta\eta) + (ka)^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}\varphi(\theta\eta)].$$

Выражения в средних скобках положительны, и можно в средней скобке для функции $\varphi'(\theta\eta)$ заменить $\varphi(\theta\eta)$ на $\varphi(\eta)$ и $\sqrt{1-\theta\eta}$ на $\sqrt{1-\eta}$. Тогда для функции $R_{02}(\eta)$ получим

$$R_{02}(\eta) = ka\,(2\eta)^{-1}\left[-1 + \varphi^2(\eta) + (ka)^{-1}(1-\eta)^{-1/2}\right] \times$$
$$\times \left[4\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\eta)^2\,\theta\,(1-\theta\eta)^{-1/2}\right] + \theta\,(ka)^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}.$$

Ясно, что $4\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\eta)^2\,\theta\,(1-\theta\eta)^{-1/2} > 0$, откуда и следует положительность функции $R_{02}(\eta)$.

Таким образом доказано, что $R_1(\eta) > 0$.

3. При больших $ka$ уравнение (1) переходит в уравнение Рэлея для упругого полупространства, а условие (4) выполняется всегда. Если для больших аргументов в разложениях бесселевых функций сохранить только два слагаемых, то из условия (4) получим

$$8\sqrt{1-\theta}\,(ka)^2 - (17-16\theta)\,ka - 6\sqrt{1-\theta} > 0. \qquad (7)$$

Численные расчеты условий (4), (7) и работы (2) при рзличных значениях $\nu$ приведены в табл. I соответственно в столбцах I, II и III.

*Таблица I*

| $\nu$ | $\lambda D^{-1} = \pi (ka)^{-1}$ | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| −0,9 | 2,01011 | 1,83860 | |
| −0,7 | 1,95056 | 1,80038 | |
| −0,5 | 1,88359 | 1,74851 | |
| −0,3 | 1,80721 | 1,70018 | |
| −0,1 | 1,71853 | 1,63311 | |
| 0 | 1,66828 | 1,59503 | 1,67 |
| 0,1 | 1,61131 | 1,54815 | |
| 0,15 | 1,58337 | 1,52442 | 1,583 |
| 0,2 | 1,552 | 1,49818 | |
| 0,25 | 1,51881 | 1,47006 | 1,517 |
| 0,3 | 1,48358 | 1,43981 | |
| 0,35 | 1,44606 | 1,40756 | 1,445 |
| 0,4 | 1,40594 | 1,37177 | |
| 0,5 | 1,31628 | 1,29111 | 1,310 |

Здесь $\lambda$—длина волны, $D$—диаметр цилиндра в обозначениях работы (2). Для полноты приведены также отрицательные значения параметра $\nu$, которые, как известно, допускаются условием положительности упругой энергии.

Приближенное условие (7) дает значения с максимальным отличием 9,3%, при $\nu = -0{,}9$ и минимальным отличием 1,9% при $\nu = 0{,}5$.

В заключение отметим, что для фиксированного значения $\nu$, если $ka > \pi D\lambda^{-1}$, существует поверхностная волна, скорость которой дается единственным решением уравнения (1) в промежутке $0 < \eta < 1$.

Институт механики
Академии наук Армении

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Վ. Վ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

## Գլանային խոռոչով առաձգական տարածության մակերևութային ալիքների գոյության պայմանի մասին

*Աշխատանքում ուսումնասիրվել է գլանային խոռոչով առաձգական անվերջ միջավայրի, խոռոչի ուղղությամբ տարածվող, մակերևութային ալիքների գոյության հարցը։*

*Մակերևութային ալիքների գոյության և միակության համար դուրս է բերվել անհրաժեշտ և բավարար պայման։*

*Օգտագործելով Բեսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերը, ստացվել է վերը նշված պայմանի մոտավոր տարբերակը։*

*Աշխատանքի վերջում Պուասոնի գործակցի տարբեր արժեքների համար զետեղված են անհրաժեշտ և բավարար պայմանի, ինչպես նաև նրա մոտավոր տարբերակի թվային հաշվարկները։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. А. Микдлик*, ДАН СССР, т. 42, № 4 (1944). [2] *M. Biot*, Journal of Appl. Physics, v. 23, № 9 (1952). [3] *И. А. Викторов*, Акустический журн., т. 4, № 2 (1958). [4] *Б. Л. Абрамян, Г. З. Геворкян*, ДАН АрмССР, т. 83, № 2 (1986). [5] *В. Новацкий*, Теория упругости, Мир, М., 1975. [6] *М. В. Белубекян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 43, № 4 (1990).